

e m lyon 2005 option économique : corrigé rapide

exercice 1

1. Par définition, (I, J, K) est une famille génératrice de E . Or cette famille est libre, car $xI + yJ + zK = 0$ implique $x = y = z = 0$. Donc (I, J, K) est une base de E , donc E est de dimension 3.

2. $J^2 = K$; $JK = KJ = K^2 = 0$.

3. a. I et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$L^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2$$

En effet, d'après 2, $J^3 = J^2J = KJ = 0$, et donc $J^k = 0$ pour tout $k \geq 3$.

$J^0 = I$, $J^1 = J$, $J^2 = K$, on obtient bien :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$$

On pouvait faire aussi un raisonnement par récurrence.

b. L est inversible car c'est une matrice triangulaire sans zéros sur la diagonale.

La propriété à établir est acquise pour n entier positif ou nul, d'après 3. a. Soit donc n *négligé*. Alors $-n$ est *positif*, et on peut écrire, toujours d'après 3.a :

$$L^{-n} = I - nJ + \frac{(-n)(-n-1)}{2} K = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2} K$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} L^{-n} \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K \right) &= \left(I - nJ + \frac{n(n+1)}{2} K \right) \left(I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K \right) = \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K - nJ - n^2 J^2 + 0 + \frac{n(n+1)}{2} K + 0 + 0 \\ &= I + \left(\frac{n(n-1)}{2} - n^2 + \frac{n(n+1)}{2} \right) K = I \end{aligned}$$

Ceci prouve que L^{-n} est inversible, d'inverse $I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$. Or l'énoncé nous "rappelle" fort opportunément que pour une matrice inversible M , $M^{-k} = (M^k)^{-1}$. Ici, L est inversible, donc $L^{-n} = (L^n)^{-1}$, et donc, en prenant les inverses :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$$

La propriété à établir est donc vraie pour n négatif, elle donc vraie pour tout entier relatif n .

c. $L = I + J$, donc $J = L - I$.

$K = J^2 = (L - I)^2 = I - 2L + L^2$ (formule du binôme, L et $-I$ commutent). Il vient :

$$\begin{aligned} L^n &= I + n(L - I) + \frac{n(n-1)}{2} (I - 2L + L^2) \\ &= \left(1 - n + \frac{n(n-1)}{2} \right) I + (n - n(n-1))L + \frac{n(n-1)}{2} L^2 \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} I + (2n - n^2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2 \end{aligned}$$

Ça marche avec $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ce qui est plutôt bon signe...

4. Le but des concepteurs est-il de décourager définitivement les candidats (et leurs professeurs) de la méthode du pivot ?

Sur la matrice $A - \lambda I$, les manipulations $L_1 \leftrightarrow L_3$, puis $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_1$ conduisent à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -2\lambda+3 & \lambda-1 \\ 0 & 4-3\lambda & (\lambda-1)(-\lambda+2) \end{pmatrix}$$

La manipulation $L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda + 2)L_2$ fournit alors

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -2\lambda+3 & \lambda-1 \\ 0 & -2(\lambda^2+\lambda+1) & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 + \lambda + 1$ n'est jamais nul (discriminant négatif), on obtient donc, en explicitant le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + (3-\lambda)z = 0 \\ (\lambda-1)z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, le système a des solutions non nulles, donc 1 est valeur propre. Si $\lambda \neq 1$, on obtient $x = y = z = 0$. Donc 1 est l'unique valeur propre de A.

Si f était diagonalisable avec 1 pour seule valeur propre, on aurait $A = PIP^{-1} = I$. Or $A \neq I$, donc A n'est pas diagonalisable.

5. a. La matrice $f - e$ dans la base canonique est la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } v = (f - e)(w) = (-1, 1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } u = (f - e)(v) = (1, 0, -1)$$

$xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$. La famille (u, v, w) est donc libre. Comme $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3, il en résulte que (u, v, w) est une base de $\mathbf{R}^3$.

b. Il faut calculer $f(u)$, $f(v)$, $f(w)$. Pour calculer $f(u)$, le plus simple est de multiplier la matrice de f dans la base canonique par la matrice de u dans cette même base, on trouve $f(u) = \dots u$. Pour $f(v)$ et $f(w)$, on peut faire de même, on peut aussi écrire

$$v = (f - e)(w), \text{ donc } v = f(w) - w, \text{ donc } f(w) = v + w.$$

$$\text{De même } f(v) = u + v.$$

On obtient donc la matrice de f dans la base (u, v, w) . Il s'agit de la matrice ... L !

c. L est inversible d'après 3. b, et d'après 3. c, on a, pour tout entier relatif n :

$$f^n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} e + (2n - n^2)f + \frac{n(n-1)}{2} f^2$$

(Tout le monde sait, bien entendu, que f^n désigne l'endomorphisme $f \circ f \circ \dots \circ f$ si n est positif, etc...)

exercice 2

1. sur $]0, +\infty[$, f est strictement décroissante, sa limite à droite en 0 est 1 sa limite en $+\infty$ est 0.

2. f est positive ou nulle sur $\mathbf{R}$, continue sur $]0, +\infty[$ (quotient de deux fonctions continues avec le dénominateur qui ne s'annule pas) et sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle). Enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+1} + 1 \right] = 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

3. C'est fait :

$$\text{Si } x \leq 0, \int_{-\infty}^x f(t)dt = 0 \quad ; \quad \text{Si } x > 0, \int_{-\infty}^x f(t)dt = 1 - \frac{1}{x+1}$$

4.

$$\int_0^x f(t)dt = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

5. a.

$$\varphi_x(0) = \int_x^x f(t)dt = 0 \quad ; \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

b. Avec $0 < u < v$:

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) = \int_{x-v}^{x+v} f(t)dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt = \int_{x-v}^{x+u} f(t)dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t)dt \geq \int_{x+u}^{x-u} f(t)dt + \int_{x-u}^{x-v} f(t)dt + \int_{x-v}^{x+v} f(t)dt$$

car on ajoute une intégrale *négative* ($x - u > x - v$ et $f > 0$). On obtient donc

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)dt$$

Cette intégrale est strictement positive car $x + u < x + v$ et $f > 0$ (faut-il établir en détail cette stricte positivité ?), donc φ_x est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On aurait pu établir ce résultat de manière plus simple en écrivant

$$\varphi_x(v) = \int_{x-v}^{x+v} f(t)dt = \int_{x-v}^{x-u} f(t)dt + \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t)dt > \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt = \varphi_x(u)$$

avec la même difficulté quant à l'inégalité stricte.

c. φ_x est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $\varphi_x(0) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u) = 1$, donc φ_x réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. Le nombre $1/2$ appartient à l'intervalle $[0, 1[$, donc l'équation $\varphi_x(u) = 1/2$ admet une solution unique dans $[0, +\infty[$.

Oui, $U(x)$ est l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = 1/2 \dots$

6. a. Pour $0 \leq x < 1/2$, on a $2x - 1 < 0$, donc

$$\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t)dt = \int_{2x-1}^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

d'après le 4. Donc $U(x) = 1 - x$ si $0 \leq x < 1/2$.

b. Pour $x \geq 1/2$, on a $2x \geq 1$, et comme f est positive, il vient

$$\varphi_x(x) = \int_0^{2x} f(t)dt \geq \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

$\varphi_x(x) \geq 1/2$; $\varphi_x(U(x)) = 1/2$; φ_x est strictement croissante ; donc $x \geq U(x)$, $x - U(x) \geq 0$.

On peut donc écrire :

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{t+1} \right]_{x-U(x)}^{x+U(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{x+U(x)+1} + \frac{1}{x-U(x)+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+U(x)-1+x+U(x)+1}{(x+1)^2 - [U(x)]^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2U(x)}{(x+1)^2 - [U(x)]^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow [U(x)]^2 + 4U(x) - (x+1)^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $16 + 4(x+1)^2 = 4(4 + (x+1)^2)$, positif. Une des solutions de cette équation est négative, l'autre est $U(x)$. on obtient bien, après simplification :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$$

Faut le voir pour le croire !

7. a. U est continue sur $]0, 1/2[$ et sur $]1/2, +\infty[$, comme somme de fonctions continues. En $1/2$, la limite à gauche de U est égale à la limite à droite, donc U est continue en $1/2$. U est donc continue sur $[0, +\infty[$.

b. U est dérivable sur $]0, 1/2[$ et sur $]1/2, +\infty[$, comme somme de fonctions dérivables.

Pour la dérivabilité en $1/2$:

$$\text{Si } x > \frac{1}{2}, U(x) = 1 - x, U'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} U'(x) = -1$$

$$\text{Si } x > 1/2, U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2, U'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4 + (x+1)^2}}, \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} U'(x) = \frac{3}{5}$$

Et on va dire que c'est suffisant pour montrer que U n'est pas dérivable en $1/2$.

c. La technique de la quantité conjuguée...

$$\begin{aligned} U(x) - (x-1) &= \sqrt{4+(x+1)^2} - 2 - (x+1) = \sqrt{4+(x+1)^2} - (x+1) \\ &= \frac{(\sqrt{4+(x+1)^2} - (x+1))(\sqrt{4+(x+1)^2} + (x+1))}{\sqrt{4+(x+1)^2} + (x+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{4+(x+1)^2})^2 - (x+1)^2}{\sqrt{4+(x+1)^2} + (x+1)} = \frac{4}{\sqrt{4+(x+1)^2} + (x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où la conclusion, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U .

d. U est décroissante sur $[0, 1/2]$, croissante sur $[1/2, +\infty[$, son minimum est $1/2$, atteint en $1/2$.

8. a. $a_0 = 1 \geq 1/2$ et si $a_n \geq 1/2$, alors $a_{n+1} = U(a_n) \geq 1/2$ car le minimum de U est $1/2$. La propriété est établie par récurrence.

b. Pour tout n dans $\mathbf{N}$, $a_n \in [1/2, +\infty[$, et U est croissante sur $[1/2, +\infty[$, donc la suite (a_n) est monotone.

$a_1 = U(a_0) = U(1) = 2\sqrt{2} - 2 \leq 1 = a_0$ car $2\sqrt{2} \leq 3$ car $\sqrt{2} \leq 3/2$ car $2 \leq 9/4$... Donc la suite (a_n) est décroissante.

c. (a_n) est décroissante et minorée par $1/2$, elle est donc convergente. Sa limite est un point fixe de U , car U est continue ; $1/2$ est un point fixe de U , mais est-ce le seul ? Oui ! car si $0 \leq x < 1/2$, $U(x) = 1 - x \neq x$; et si $x \geq 1/2$,

$$\begin{aligned} U(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{4+(1+x)^2} - 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{4+(1+x)^2} = x+2 \Leftrightarrow 4+(1+x)^2 = (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow 4+x^2+2x+1 = x^2+4x+4 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que (a_n) converge vers $1/2$.

d.

```
program eml05;
var n:integer;a:real;
BEGIN
n:=0;a:=1;
repeat n:=n+1;a:=sqrt(4+sqr(a+1))-2; until 0.5-a < 1.e-6;
writeln(n);
END.
```

(La suite (a_n) est décroissante et converge vers $1/2$, la valeur absolue de $a_n - 1/2$ est donc égale à $1/2 - a_n$.)

Un exercice bien tordu, tout de même...

exercice 3

1. a. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $(T_n = k) = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap S_k$, donc, par indépendance des épreuves :

$$P(T_n = k) = x^k (1-x).$$

T_n suit donc la loi géométrique de paramètre $1-x$, et

$$E(T_n) = \frac{1}{1-x} ; \quad V(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

b. Les épreuves successives sont indépendantes, donc les T_i le sont.

c. La linéarité de l'espérance donne le premier résultat, le fait que les T_i soient indépendantes donne le deuxième.

d. La loi de Pascal n'est pas au programme, il serait bon que l'énoncé donne un minimum d'indications...

$(S_n = k)$ est l'intersection des deux événements indépendants A et B , avec

A : " $n-1$ succès au cours des $k-1$ premières épreuves", de probabilité

$$P(A) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{n-1} x^{k-1-(n-1)} = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{n-1} x^{k-n}$$

car les épreuves sont indépendantes ;

B : " k succès à la k -ème épreuve, probabilité $P(B) = 1-x$."

On obtient donc

$$P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n}$$

e. Dans les limites du programme, on ne peut pas dire grand'chose de la somme proposée... L'énoncé nous dit que S_n est une variable aléatoire, il faut le croire sur parole ! La première chose que l'on fait dans l'étude de la loi géométrique, après sa définition, c'est de montrer que l'on a bien une loi de probabilité. Ici l'énoncé met la charrue avant les bœufs, nous demande – implicitement – d'admettre que S_n est une variable aléatoire, puis de conclure quant au résultat qui permet d'affirmer que S_n est une variable aléatoire !

Bref, *en admettant* que S_n est une variable aléatoire, comme elle prend ses valeurs dans $[[n, +\infty[[$, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k) = 1 \quad ; \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} = 1 \quad ; \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

en multipliant les deux cotés de l'égalité par $x^n/(1-x)^n$.

2. a. X est le temps d'attente du premier succès lors d'épreuves identiques et indépendantes, donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

Certes le programme mentionne les "lois conditionnelles", mais dans le cadre de la loi d'un couple, au même titre que les lois marginales. Sachant $X = k$, Y est alors le nombre de succès lors de k épreuves identiques et indépendantes, le loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ est donc la loi binomiale de paramètres k et p .

b. Y peut prendre toute valeur dans $\mathbf{N}$.

c. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = n)_{n \in \mathbf{N}^*}$:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k \cap Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(X=k)}(Y = 0)P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^k q^{k-1} p = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p}{q} \left(\frac{1}{1-q^2} - 1 \right) = \frac{p}{q} \frac{1-1+q^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq}{p(1+q)} = \frac{q}{1+q} \end{aligned}$$

d. Même formule, avec le même système complet d'événements. La somme démarre valablement à $k = n$.

$$P(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P_{(X=k)}(Y = n)P(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n q^{k-n} q^{k-1} p = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1} = \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^{2k}$$

Pour comprendre comment utiliser le 1.e, le mieux est d'expliciter. Le 1.e nous dit

$$\binom{n-1}{n-1} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n+1} + \binom{n+1}{n-1} x^{n+2} + \dots = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^{2k} &= \binom{n}{n} (q^2)^n + \binom{n+1}{n} (q^2)^{n+1} + \binom{n+2}{n} (q^2)^{n+2} + \dots = \\ &= \frac{1}{q^2} \left[\binom{n}{n} (q^2)^{n+1} + \binom{n+1}{n} (q^2)^{n+2} + \binom{n+2}{n} (q^2)^{n+3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{q^2} \frac{(q^2)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Maintenant on reporte :

$$P(Y = n) = \frac{1}{q^2} \left[\frac{p}{q} \frac{q^2}{1-q^2} \right]^{n+1} = \frac{1}{q^2} \left[\frac{pq}{(1-q)(1+q)} \right]^{n+1} = \frac{1}{q^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n+1} = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$$