

exercice 1

Première partie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2A = \dots A^3, \text{ donc } A^3 = A^2 + 2A.$$

2°) A et A^2 ne sont pas colinéaires (leurs composantes ne sont pas proportionnelles), donc (A, A^2) est une famille libre de $M_3(\mathbf{R})$.

3°) On va établir le résultat proposé par récurrence, en portant une particulière attention à l'unicité...

La propriété à établir est vraie pour $n = 1$, car $A^1 = A = 1 \times A + 0 \times A^2$. A s'exprime donc comme combinaison linéaire de A et A^2 , et cette combinaison linéaire est *unique*, car la famille (A, A^2) est libre. (En effet, A appartient au sev engendré par A, A^2 , et (A, A^2) est une base de ce sev.)

On a donc

$$a_1 = 1 ; b_1 = 0$$

Supposons la propriété vraie pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$: il existe un couple *unique* (a_n, b_n) tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n A^2) \times A = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n (A^2 + 2A) = 2b_n A + (a_n + b_n) A^2$$

La propriété est donc établie pour $n + 1$: il existe un couple *unique* (a_{n+1}, b_{n+1}) tel que $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} A^2$, et on a :

$$a_{n+1} = 2b_n ; b_{n+1} = a_n + b_n$$

La conclusion en résulte, par récurrence.

4°)

program eml03;

var a, b, aux : real ; i, n : integer ;

BEGIN

readln(n) ; a := 1 ; b := 0 ;

writeln(1, a, b) ;

for i := 2 to n do

begin aux := a ; a := 2*b ; b := aux + b ; writeln(i, a, b) ; end ;

END.

5°) a) $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, donc

$$a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + 2b_n = 2a_n + a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

b) La suite (a_n) est donc une suite linéaire récurrente à deux termes, d'équation caractéristique $r^2 = r + 2$; les solutions de cette équation sont -1 et 2 , on a donc, pour tout $n \geq 1$:

$$a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$$

avec

$$a_1 = 1 = -\alpha + 2\beta$$

$$a_2 = 0 = \alpha + 4\beta$$

$$(a_2 \text{ est égal à } 0 \text{ car } A^2 = 0 \times A + 1 \times A^2)$$

En résolvant ce système, on trouve $\alpha = 1/6$, $\beta = -2/3$, ce qui permet d'écrire, pour $n \geq 1$:

$$a_n = (-2/3)(-1)^n + (1/6)2^n$$

Pour b_n , on a $a_{n+1} = 2b_n$, donc $b_n = (1/2)a_{n+1}$, soit

$$b_n = (1/3)(-1)^n + (1/6)2^n$$

et on prend le temps de vérifier que ça marche pour $n = 1$ et $n = 2$, histoire d'éliminer de possibles petites erreurs...

c) $A^n = a_n A + b_n A^2$ avec a_n et b_n comme trouvés ci-dessus.

deuxième partie $A = \text{Mat}(f, (e_1, e_2, e_3))$

1°) $\text{Im}(f)$ est engendré par les vecteur-colonne de A ; on en extrait la famille libre $((1, 1, 1), (1, 0, 0))$, qui est une base de $\text{Im}(f)$, qui est de dimension 2.

2°) a) Oui, f est diagonalisable, car sa matrice A est symétrique réelle.

b) Non, f n'est pas bijectif, car f n'est pas surjectif, car $\text{Im}(f)$ n'est pas égal à $\mathbf{R}^3$.

3°) On résout $(f - \lambda \text{Id})(u) = 0$ (ou $A - \lambda I = 0 \dots$) ; Les manipulations élémentaires

$L_1 \leftrightarrow L_3$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - (1 - \lambda)L_1$; $L_2 \leftrightarrow L_3$; $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$

sur la matrice $A - \lambda I$ conduisent à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 + \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$

$2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = 0$ ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$, qui sont donc les trois valeurs propres de f .

Pour les sous-espaces propres, on jette un coup d'oeil aux questions qui suivent :

Pour $\lambda = -1$, on a $x + z = 0$, $y - z = 0$; sous-espace de base $(-1, 1, 1)$;

Pour $\lambda = 0$, on a $x = 0$, $y + z = 0$; sous-espace de base $(0, -1, 1)$;

Pour $\lambda = 2$, on a $x - 2z = 0$, $y - z = 0$; sous-espace de base $(2, 1, 1)$.

Là aussi, on prend le temps d'éliminer d'éventuelles menues erreurs...

4°) A est diagonalisable, et d'après la théorie du changement de base, $A = P D P^{-1}$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce dernier résultat (P^{-1}) obtenu avec la méthode du pivot, ou toute autre méthode acceptable. On peut s'épargner ce calcul si on n'est pas absolument sûr de l'expression de P et D , qui doivent vérifier les contraintes de l'énoncé...

5°) Posons $M = PXP^{-1}$; l'équation proposée, $AM + MA = 0$, est équivalente successivement à :

$$(PDP^{-1})(PXP^{-1}) + (PDP^{-1})(PXP^{-1}) = 0$$

$$PDXP^{-1} + PXDP^{-1} = 0$$

$$P(DX + XD)P^{-1} = 0$$

$$DX + XD = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x & -x' & -x'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 2z & 2z' & 2z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 0 & 2x'' \\ -y & 0 & 2y'' \\ -z & 0 & 2z'' \end{pmatrix} = 0$$

$$x = x' = x'' = y = y' = y'' = z = z' = z'' = 0$$

Ne subsiste que y' ... L'ensemble des matrices M telles $AM + MA = 0$ est donc l'ensemble des matrices $x P M_{2,2} P^{-1}$, avec x appartenant à $\mathbf{R}$, et $M_{2,2}$ la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf celui en deuxième ligne et deuxième colonne, qui est égal à 1.

exercice 2

première partie

$x > 0$, $y > 0$, $g(x, y) = x e^{-x} / y + y / e$

1°) g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+$, car g est la somme de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+$.

2°)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{e^{-x} - x e^{-x}}{y} ; \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-x e^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e}$$

3°)

$$\begin{cases} \frac{e^{-x} - xe^{-x}}{y} = 0 \\ -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} e^{-x} - xe^{-x} = 0 \\ -exe^{-x} + y^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} e^{-x}(1-x) = 0 \\ -1 + y^2 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \text{ car } y > 0 \end{cases}$$

4°) Si g admet un extremum en (x_0, y_0) , alors les dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent en (x_0, y_0) . Le seul point où g est susceptible de posséder un extremum est donc le point (1, 1). On calcule r, s, t et on trouve :

$$r = (x-2)e^{-x}/y ; s = (x-1)e^{-x}/y^2 ; t = 2xe^{-x}/y^3$$

En (1, 1), $r = -1/e ; s = 0 ; t = 2/e ; rt - s^2 < 0$.

g n'admet pas d'extremum en (1, 1), donc pas d'extremum sur $\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+$.

deuxième partie

1°) a) Pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $h_n(x) = 0$ est équivalent à :

$$\frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n = 0$$

$$xe^{-x} - x^{2n} = 0$$

$$e^{-x} - x^{2n-1} = 0$$

$$\varphi_n(x) = 0$$

b) $\varphi_n'(x) = -e^{-x} - (2n-1)x^{2n-2} < 0$ pour tout $x > 0$ car $n \geq 1$. φ_n est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. φ_n est strictement décroissante et continue sur $[0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_n(x) = 1/e > 0$, donc l'équation $\varphi_n(x) = 0$ d'inconnue x appartenant à $]0, +\infty[$ admet une unique solution u_n .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1/e > 0$ et $\varphi_n(1) = 1/e - 1 < 0$, donc $0 < u_n < 1$.

2°) a) $\varphi_n(u_n) = 0$, donc $\exp(-u_n) - u_n^{2n-1} = 0$, $\exp(-u_n) = u_n^{2n-1}$, $-u_n = (2n-1)\ln(u_n)$ (en prenant le logarithme népérien des deux membres), $\ln(u_n) = -u_n/(2n-1)$.

b) $0 < u_n < 1$, donc $0 > -u_n > -1$, donc

$$0 > \frac{-u_n}{2n-1} > \frac{-1}{2n-1}$$

Par encadrement, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-u_n}{2n-1} = 0$$

Or $\ln(u_n) = -u_n/(2n-1)$, donc

$$u_n = \exp\left(\frac{-u_n}{2n-1}\right)$$

La fonction exponentielle est continue en 0, donc la suite (u_n) converge vers 1.

exercice 3

1°) Pour tout $t \geq 2$:

$$\int_2^t \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int_2^t x^{-3/2} dt = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2} \right]_2^t = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} \right]_2^t = \frac{-2}{\sqrt{t}} + \sqrt{2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sqrt{2}$$

L'intégrale proposée est donc convergente, et vaut $\sqrt{2}$.

2°) f est positive ou nulle sur $\mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}$ sauf en 2, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

3°) a) appelons F cette fonction de répartition... Si $t \leq 2$, alors $F(t) = 0$, et, si $t \geq 2$:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^t \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2}{\sqrt{t}} + \sqrt{2} \right)$$

Donc :

$$\begin{cases} F(t) = 0 & \text{si } t \leq 2 \\ F(t) = 1 - \sqrt{\frac{2}{t}} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

b) Sous réserve de convergence :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{x}{x\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

intégrale de Riemann divergente. Donc X n'admet pas d'espérance.

4°) a) Pour tout appartenant à $\mathbf{R}$:

$$G(t) = P(U \leq t) = 1 - P(U > t) = 1 - P[(T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)] = 1 - [P(X > t)]^3$$

car T_1, T_2, T_3 sont indépendantes et de même loi que X. Donc :

$$\text{Si } t \leq 2, G(t) = 1 - 1^3 = 0 ;$$

$$\text{Si } t \geq 2, G(t) = 1 - [1 - P(X \leq t)]^3 = 1 - [1 - F(t)]^3 = 1 - \left(\sqrt{\frac{2}{t}}\right)^3 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{t\sqrt{t}}$$

Donc :

$$\begin{cases} G(t) = 0 & \text{si } t \leq 2 \\ G(t) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{t\sqrt{t}} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

b) La fonction de répartition G est continue sur $\mathbf{R}$, donc U est une variable aléatoire à densité.

Pour $t < 2$, $G'(t) = 0$, et pour $t > 2$, écrivons :

$$G(t) = 1 - 2\sqrt{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

On a donc, pour $t > 2$:

$$G'(t) = -2\sqrt{2} \left(-\frac{3}{2}\right) t^{-\frac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{t^2\sqrt{t}}$$

Une densité g de U est donc définie par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 2 \\ g(t) = \frac{3\sqrt{2}}{t^2\sqrt{t}} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

c) Sous réserve de convergence :

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_2^{+\infty} t \frac{3\sqrt{2}}{t^2\sqrt{t}} dt = 3\sqrt{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$$

Cette dernière intégrale est convergente d'après le 1°), et vaut $\sqrt{2}$, donc U admet une espérance, et

$$E(U) = 3\sqrt{2} \sqrt{2} = 6$$

5°) a) Pour tout t appartenant à $\mathbf{R}$:

$$H(t) = P(V \leq t) = P[(T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t)] = (P(X \leq t))^3$$

car T_1, T_2, T_3 sont indépendantes et de même loi que X. Donc $H(t) = (F(t))^3$.

$$\begin{cases} H(t) = 0 & \text{si } t \leq 2 \\ H(t) = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^3 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

b) H est continue sur $\mathbf{R}$, donc V admet une densité.

$$\text{Si } t < 2, H'(t) = 0$$

$$\text{Si } t > 2, H'(t) = 3 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2 \left(-\sqrt{2}\right) \left(\frac{-1}{2t\sqrt{t}}\right) = \frac{3}{t\sqrt{2t}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2$$

(On a en effet $(1/\sqrt{t})' = (t^{-1/2})' = (-1/2)t^{-3/2}$.)

Une densité h de V est donc définie par :

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t < 2 \\ h(t) = \frac{3}{t\sqrt{2t}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

c) Sous réserve de convergence :

$$E(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} th(t)dt = \int_2^{+\infty} t \frac{3}{t\sqrt{2t}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2 dt = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2 dt$$

La fonction sous le signe intégrale est positive ou nulle et continue sur $[2, +\infty[$; elle est équivalente à $1/\sqrt{t}$ au voisinage de $+\infty$. Or l'intégrale sur $[2, +\infty[$ de $1/\sqrt{t}$ est divergente, d'après Riemann. Il en résulte que V n'admet pas d'espérance.