

em lyon 2004 voie éco, corrigé rapide

exercice 1

$$t \in \mathbf{R}, f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) = \frac{2e^t(1-t+t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0$ car $t^2 - t + 1$ est partout positif (son discriminant est positif).

En $+\infty$, $f(t) \sim 2e^t/t$ qui tend vers $+\infty$, donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

En $-\infty$, pas de problème, $\lim_{-\infty} f = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0	$+\infty$

2. a) Soit $g(t) = 2e^t - t - t^2$; $g'(t) = 2e^t - 1 - 2t$, et il est nécessaire de passer à la dérivée seconde : $g''(t) = 2e^t - 2 = 2(e^t - 1) > 0$ pour $t > 0$, donc g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Or $g'(0) = 0$, donc $g'(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Or $g(0) = 2$, donc g est positive sur $[0, +\infty[$.

Donc, pour tout $t \in [0, +\infty[: 2e^t - t - t^2 > 0$.

Pour tout $t \geq 0$, $1+t \geq \sqrt{1+t^2} \Leftrightarrow (1+t)^2 \geq 1+t^2 \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \geq 1+t^2 \Leftrightarrow 2t \geq 0$ vrai.

Donc, pour tout $t \in [0, +\infty[: 1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

b) $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(t) > t \Leftrightarrow \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} > t \Leftrightarrow 2e^t > t\sqrt{1+t^2}$

Or d'après ce qu'on vient de voir, pour tout $t \geq 0 : 2e^t > t + t^2 = t(1+t) \geq t\sqrt{1+t^2}$

Donc, $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(t) > t$.

3. a)

* $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$. En effet, $u_0 = 1 \geq 0$, et si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > u_n \geq 0$. La conclusion en résulte, par récurrence.

* La suite (u_n) est croissante, car $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 0$ et $\forall t \geq 0$, $f(t) > t$, donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$.

* Si la suite (u_n) convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell \geq 0$ (car $u_n \geq 0$ pour tout n), et $\ell = f(\ell)$ (car f est continue sur $[0, +\infty[$). Or $\forall t \geq 0$, $f(t) > t$. Donc la suite (u_n) diverge.

* La suite (u_n) diverge et elle est strictement croissante, donc u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Vous préférez peut-être ce genre de questions ?

program eml2004 ;

var u : real ; k : integer ;

BEGIN

u := 1 ; k := 0 ;

repeat k := k + 1 ; u := 2*exp(u/sqrt(u*u + 1)) ; until u > 1.e6 ;

writeln(k)

END.

4. $G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)dt$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G(-x) = \int_x^{-x} f(t)dt = -\int_{-x}^x f(t)dt$ (relation de Chasles), donc $G(-x) = -G(x)$. Donc G est impaire...

b) f est continue sur $\mathbf{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbf{R}$. Soit φ l'une d'entre elles. Par définition de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbf{R}, G(x) = \varphi(x) - \varphi(-x).$$

Donc G est de classe C^1 (somme de deux fonctions de classe C^1). Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$G'(x) = \varphi'(x) + \varphi'(-x) = f(x) + f(-x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

c) f est positive, donc pour tout $x \geq 0$:

$$G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt \geq \int_0^x \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \int_0^x 2e^t dt = 2(e^x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $G(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d) G est strictement croissante. G est impaire et $\lim_{+\infty} G = +\infty$, donc $\lim_{-\infty} G = -\infty$.

exercice 2

$$E_1(A) = \{M \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}) ; AM = M\} ;$$

$$E_2(A) = \{M \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R}) ; A^2M = AM\}$$

Partie I

1. $0 \in E_1(A)$ car $A0 = 0$. Si M et N appartiennent à $E_1(A)$, alors $A(M + N) = AM + AN = M + N$, donc $M + N \in E_1(A)$. Si M appartient à $E_1(A)$ et a appartient à $\mathbf{R}$, alors $A(aM) = a(AM) = aM$, donc aM appartient à $E_1(A)$. Par conséquent $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$.

2. a) Soit M appartenant à $E_1(A)$. Alors $AM = M$, donc $A^2M = A(AM) = AM$, donc $M \in E_2(A)$. Par conséquent $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b) Soit $M \in E_2(A)$. Alors $A^2M = AM$, donc $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$, $AM = M$, $M \in E_1(A)$. Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$. Comme $E_1(A) \subset E_2(A)$ est toujours vrai, on a prouvé : si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

3. a) Soit $M \in E_1(A)$. Alors $AM = M$, donc $(A - I)M = 0$, $(A - I)^{-1}(A - I)M = (A - I)0$, $M = 0$. Donc, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.

b) $B - I$ est inversible (*triangulaire sans zéros sur la diagonale*), donc $E_1(B) = \{0\}$. B est inversible (*triangulaire sans zéros sur la diagonale*), donc $E_2(A) = E_1(A) = \{0\}$.

Partie II

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On cherche $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X \neq 0$ tels que $(A - \lambda I)X = 0$. Sur la matrice $A - \lambda I$, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_1 \leftrightarrow L_3 ; L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow 2L_3 - (3 - \lambda)L_1 ; L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

On a alors la matrice (réduite de Gauss) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & -2\lambda + 2 & -2 + \lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de C sont donc 0, 1, 2. Les sous espaces propres associés sont :

$$E_0 = \text{Vect}(1, 1, 1) ; E_1 = \text{Vect}(1, 1, 0) ; E_2 = \text{Vect}(1, 0, 1). \text{ (A vérifier !)}$$

2. C est diagonalisable (3 valeurs propres distinctes), et d'après la théorie du changement de base :

$$C = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $M \in E_1(C) \Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow PDP^{-1}M = M \Leftrightarrow PDN = M \Leftrightarrow DN = P^{-1}M = N \Leftrightarrow DN = N$. Donc $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.

4. Cherchons N sous la forme $N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$. $N \in E_1(D) \Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x' & y' & y'' \\ 2x' & 2y' & 2y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x' & y' & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a montré que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N = P^{-1}M \in E_1(D) \Leftrightarrow M = PN$ avec N de la forme précédente. Donc $M \in E_1(C) \Leftrightarrow$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = aM_1 + bM_2 + cM_3.$$

(M_1, M_2, M_3) est donc une famille génératrice de $E_1(C)$. Comme cette famille est libre ($aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$), c'est une base de E_1 qui est donc de dimension 3

6. $M \in E_2(C) \Leftrightarrow C^2 M = C M \Leftrightarrow P D^2 P^{-1} M = P D P^{-1} M \Leftrightarrow P D^2 N = P D N \Leftrightarrow D^2 N = D N \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x' & y' & y'' \\ 4x' & 4y' & 4y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x' & y' & z' \\ 2x'' & 2y'' & 2z'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M \in E_2(C) \Leftrightarrow M = PN$ avec N comme ci-dessus. Pour abréger un peu, on dira que E_2 est engendré par les 6 matrices $PM_{i,j}$, où i varie de 1 à 2 et j de 1 à 3, et où $M_{i,j}$ désigne la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf celui en i-ème ligne et j-ème colonne, qui vaut 1. La famille des 6 matrices $M_{i,j}$ est libre (extraite de la base canonique de $M_3(\mathbf{R})$), l'inversibilité de P assure que la famille des $PM_{i,j}$ est aussi libre, elle est donc une base de $E_2(C)$, qui est de dimension 6, qui contient $E_1(C)$ mais ne lui est pas identique...

exercice 3

Partie I

1. X prend ses valeurs dans $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, car le premier changement intervient au plus tôt au deuxième tirage, et, pour tout $k \geq 2$, l'événement $B_1 \dots B_{k-1} R_k$ réalise $X = k$.

2. $\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, (X = k) = B_1 \dots B_{k-1} \bar{B}_k \cup R_1 \dots R_{k-1} \bar{R}_k \cup V_1 \dots V_{k-1} \bar{V}_k$.

Par incompatibilité, puis indépendance, on obtient :

$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, P(X = k) = b^{k-1}(1-b) + r^{k-1}(1-r) + v^{k-1}(1-v)$.

3. Sous réserve de convergence (absolue) :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k[b^{k-1}(1-b) + r^{k-1}(1-r) + v^{k-1}(1-v)]$$

La série est une combinaison linéaire de séries convergentes (séries géométriques dérivées de raison appartenant à $] -1, 1[$), donc convergente, et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k[b^{k-1}(1-b) + r^{k-1}(1-r) + v^{k-1}(1-v)] - 1(1-b + 1-r + 1-v)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} kb^{k-1}(1-b) + \sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r) + \sum_{k=1}^{+\infty} kv^{k-1}(1-v) - (3-b-r-v)$$

$$= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

(On reconnaît dans les trois sommes l'expression de l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $1-b$, $1-r$, $1-v$.)

Partie II

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$$

2. f possède un extremum local en (x, y) *seulement si* les deux dérivées partielles d'ordre 1 sont nulles en ce point, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} (x+y)^2 - (1-x)^2 = 0 \\ (x+y)^2 - (1-y)^2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - (1-2x+x^2) = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - (1-2y+y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

On soustrait les deux équations pour obtenir :

$$y^2 - x^2 + 2(x - y) = 0$$

$$(y-x)(y+x-2) = 0$$

$0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, donc $0 < x + y < 2$, c'est donc $y - x$ qui est nul, soit $x = y$. En reportant dans le système, on obtient $3x^2 + 2x - 1 = 0$, solutions -1 et $1/3$. $x \in]0, 1[$, la solution est donc $x = 1/3$.

L'unique point I de $]0, 1[\times]0, 1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local est $(1/3, 1/3)$.

3. Pour calculer la dérivée de $1/(1-x)^2$, le plus commode est d'écrire :

$$1/(1-x)^2 = (1-x)^{-2}, \text{ dérivée } (-1)(-2)(1-x)^{-3}.$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(x+y)^3} \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}$$

En I , $r = 27/2$, $s = 27/4$, $t = 27/2$, $rt - s^2 = 27^2(1/4 - 1/16)$, et par conséquent

$$p = q = 0 ; rt - s^2 > 0 ; r > 0 ;$$

f admet un minimum local en I

4. a) $b + r + v = 1$, donc $1 - v = b + r$, donc $E(X) = f(b, r) - 2$.

b) $E(X)$ admet donc un minimum local lorsque $b = r = v = 1/3$

Partie III

1. La fonction $t \rightarrow 1/3^t$ est continue sur $[2, +\infty[$, par conséquent

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{1}{3^t} dt$$

sous réserve de limite finie. Or :

$$\int_2^x \frac{1}{3^t} dt = \int_2^x e^{-t \ln(3)} dt = \left[-\frac{e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} \right]_2^x = -\frac{e^{-x \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} = \frac{1}{9 \ln(3)}$$

$$\text{Donc } \alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt = \frac{1}{9 \ln(3)}$$

2. g est positive ou nulle, continue sur $\mathbf{R}$ sauf en 2, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_2^{+\infty} 9 \ln(3) \frac{1}{3^t} dt = 9 \ln(3) \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt = 9 \ln(3) \frac{1}{9 \ln(3)} = 1$$

Donc g est une densité de probabilité.

$$3. \text{ Sous réserve de convergence, } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\alpha} t e^{-t \ln(3)} dt = \frac{1}{\alpha} \int_2^{+\infty} t e^{-t \ln(3)} dt .$$

Or, pour $x > 2$,

$$\int_2^x t e^{-t \ln(3)} dt = \left[-\frac{t e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} \right]_2^x + \int_2^x \frac{e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} dt = -\frac{x e^{-x \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{2 e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \int_2^x e^{-t \ln(3)} dt$$

On effectue une intégration par parties avec $u = t$, $v' = \exp(-t \ln(3))$, $u' = 1$, $v = -\exp(-t \ln(3)) / \ln(3)$, u et v étant de classe C^1 sur $[2, x]$. En passant à la limite ($x \rightarrow +\infty$), on obtient que l'intégrale est convergente, et

$$E(Y) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2}{9 \ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \alpha \right) = \frac{1}{\ln(3)} + 2$$

4. a) Encore un rappel qui n'en est pas un. A bien scruter le programme, la fonction partie entière est inconnue au bataillon...

Bon, Z prend ses valeurs dans $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} g(t) dt = 9 \ln(3) \int_k^{k+1} e^{-t \ln(3)} dt = 9 \ln(3) \left[-\frac{e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} \right]_k^{k+1} \\ &= 9[-e^{-(k+1) \ln(3)} + e^{-k \ln(3)}] = 9[e^{-k \ln(3)}(1 - e^{-\ln(3)})] = 9 \left(\frac{1}{3} \right)^k \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 6 \left(\frac{1}{3} \right)^k \end{aligned}$$

b) X prend ses valeurs dans $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$, et lorsque $b = r = v = 1/3$, on a, pour tout $k \geq 2$:

$$P(X = k) = 3 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^k \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} = 6 \left(\frac{1}{3} \right)^k$$

X et Z ont même loi de probabilité.