EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x)-f(x)=x^2e^{2x}$.

1) Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, vérifie la condition *(E)*, alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :

   pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x)=e^{2x}$.

2) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui vérifient la condition *(E)*.

3) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui vérifie la condition *(E)* et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Partie B :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{2}xe^{2x}-\dfrac{e}{2}x$.

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de *h(x)*.

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe c.