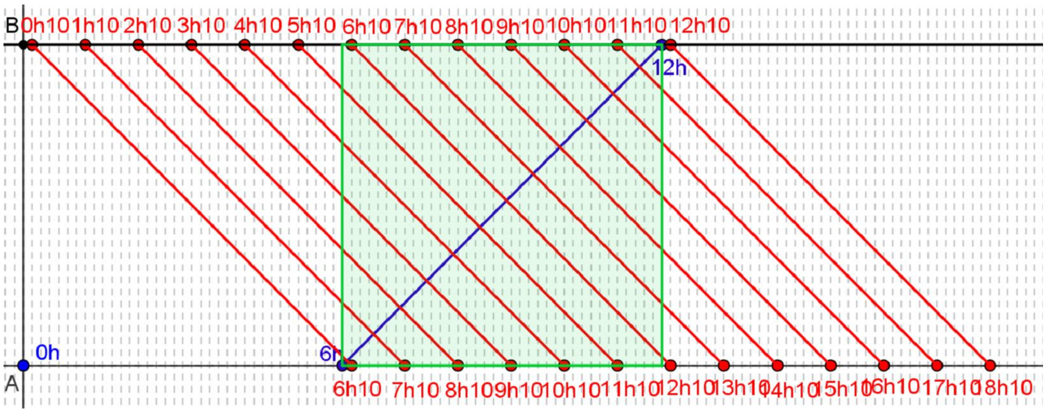
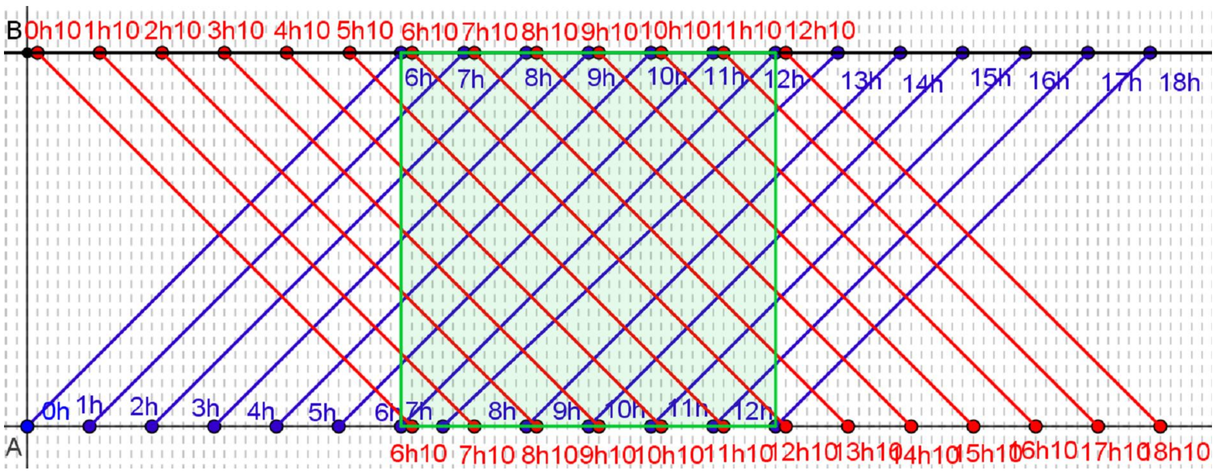
Correction des exercices 6 à 9 de la fiche de TD.

Exercice 6 : un graphique permet de mieux comprendre…
On représente en abscisses les temps : pour plus de lisibilité, on suppose que le voyage a lieu de 6h00 à 12h00. On représente A et B en ordonnées (distances

1. a.). Le trajet de Paul est représenté ci-dessous, où les croisements sont repérables comme intersection des segments obliques avec le segment du trajet de Paul.



On constate graphiquement qu'il existe douze croisements : plus finement, on constate que pour chaque heure h, à partir de 6h00, jusqu'à 11h00, il existe exactement deux croisements : le premier à $h + 5'$, le deuxième à $h + 35'$, d'où le résultat $12 = 2\times 6$, puisqu'il y a 6 entiers entre 6 et 11.



b. Même méthode, en dessinant tous les trains allant de A vers B entre 0 h et 12 h : il existe exactement $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 72$ croisements de trains.

2. a. Généralisation : si le trajet dure n heures, il y aura toujours 2 croisements pour chaque train par heure écoulée : Paul va donc croiser exactement $2n$ trains s'il part à l'heure h et qu'il arrive à l'heure $h + n$.

b. Idem : le train parti à l'heure $h - n + 1$ va croiser 2 trains, celui parti à l'heure $h - n + 2$ va croiser 4 trains, etc., donc le total de trains qui vont se croiser entre l'heure h et l'heure $h + n$ est :

$S = 2 + 4 + \ldots\ldots\ldots + (2n - 2) + 2n + (2n - 2) + \ldots\ldots\ldots + 4 + 2.$

On peut exprimer S de manière plus simple :

$S = 2(1 + 2 + \ldots\ldots + (n - 1)) + 2n + 2((n - 1) + \ldots\ldots +2 + 1)$

On sait que $1 + 2 + \ldots\ldots + (n - 1) = (n - 1) + \ldots\ldots +2 + 1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$, d'où $S = 4\dfrac{(n-1)n}{2} + 2n$, ce qui donne $S = 2(n - 1)n + 2n$. Après développement et réduction, on a $S = 2n^2$.

Partie B : d'après S. EVRARD et V. LE MEN, « Nouveau CRPE, l'épreuve écrite de mathématiques », Ellipses Editions, 09/2005 : attention, la correction de la partie A est fausse…

1.

a) L'élève réalise une frise horaire verticale, sur laquelle il place l'heure de début du film et l'heure de fin de film, ainsi que une heure « juste », intermédiaire, ce qui lui permet de calculer mentalement les deux écarts, avec cette heure juste. Ensuite, il pose une addition pour trouver la durée demandée. Il trouve ainsi une réponse correcte.

b) On peut envisager de la part d'un élève de CM2, une technique experte de la soustraction avec des nombres sexagésimaux, soit ici :

22 h 08 − 20 h 35 = 21 h 68 − 20 h 35 = 1 h 33.

Il est possible aussi de reprendre la frise et de choisir d'autres positions intermédiaires, telles que 21 h 35 puis 22 h et enfin 22 h 08. On trouve la réponse en additionnant les trois écarts : 1 h + 25 min + 8 min = 1 h 33 min.

2. L'élève effectue une soustraction avec deux nombres sexagésimaux, qu'il considère comme deux nombres décimaux. Sa différence étant un décimal de partie décimale supérieure à 60, il réalise alors une conversion 95 = 1 h + 35 min.

Le résultat est donc faux.

Effectuons le calcul demandé en ligne :

12 h 10 − 2 h 15 = 10 h 10 − 0 h 15 = 9 h 70 − 0 h 15 = 9 h 55.

La cuisinière doit mettre sa dinde à 9 h 55min.

3. Résolution de l'exercice 3 :

Le film se termine à : 20 h 50 + 2 h 25 = 22 h 75 = 23 h 15

Le journal commence à 23 h 05. 23 h 15 − 23 h 05 = 10.

Monsieur Voitou perd donc 10 min de journal.

On voit que dans ce problème, il n'est plus simplement question d'écart ou d'heure de début/fin. Le problème est plus complexe, puisqu'il doit se réaliser en deux étapes : déterminer l'heure de fin du film puis déterminer la perte de Monsieur Voitou. On peut aussi signaler une difficulté tenant au fait que l'on ne connaît pas l'heure de fin du journal. A la limite, si ce journal ne durait que 6min (s'il regardait une autre chaîne, par exemple…) monsieur Voitou n'aurait pas perdu 10min de journal !

Si l'élève n'arrive pas du tout à se représenter la chronologie des événements, il ne peut démarrer sa résolution.

4.

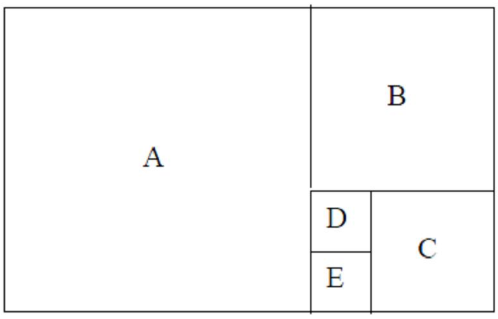
a) A travers ces exercices, on peut constater que cet élève est capable de reconnaître des problèmes relevant de transformation d'état et plus spécifiquement, qui traitent de durée. Il est capable de mettre en œuvre la procédure experte, permettant de calculer une heure de début ou une durée.

Concernant les unités de mesure de durées, il sait qu'il y a 60 min dans une heure, comme on peut le voir dans les deux exercices.

Il sait aussi effectuer une soustraction décimale, avec retenue.

b) Compte tenu de ses réussites, il faut surtout retravailler les échanges 1 h et 60 min, pour qu'il puisse mettre en œuvre cet échange dans ses calculs.

Exercice 7 (Session 2006) :

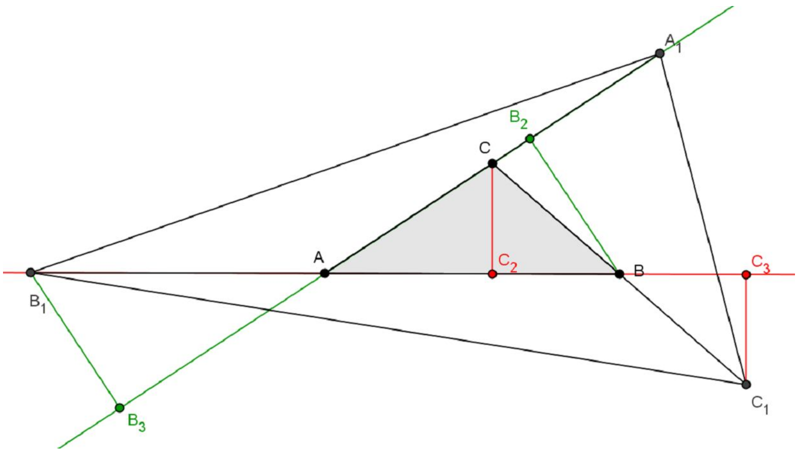


1. On a $d = e = \dfrac{c}{2}$, $b = d + c = \dfrac{3c}{2}$, $a = b + c = \dfrac{5c}{2}$.
2. On a $a^2 + b^2 + c^2 + 2d^2 = 3610$. En exprimant cette équation en fonction de c, on obtient $10c^2 = 3610$, d'où $c^2 = 361$, d'où $c = 19$ cm.
3. La plaque métallique étant homogène ;.la masse de chaque pièce est proportionnelle à son aire. L'aire de la pièce B est $\dfrac{9c^2}{4}$, celle de la pièce A est $\dfrac{25c^2}{4}$, donc la masse de la pièce A est $\dfrac{25}{9}\text{x}100 = \dfrac{2500}{9} \approx 277{,}7$ g.

4. On sait que le rapport des côtés entre A et C est égal à $\frac{5}{2}$, donc le rapport des volumes est $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$.

On en déduit que le volume du cube C est $\frac{8}{125}$ x2 = $\frac{16}{125}$ $\text{m}^3 = 128 \text{ dm}^3$.

Exercice 8 :

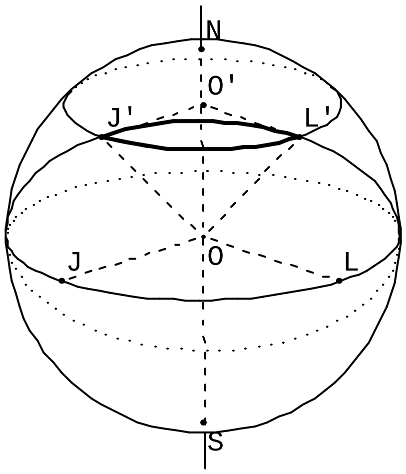


1. Soient B_2 et B_3 les projections orthogonales respectives de B et B_1 sur (AC). A étant le milieu de $[BB_1]$, on a par symétrie de centre A l'égalité $BB_2 = B_1B_3$.

Or $\text{Aire}(B_1AA_1) = \frac{1}{2}B_1B_3 \times AA_1$ et $\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}BB_2 \times AC$, avec $AA_1 = 2AC$, donc $\text{Aire}(B_1AA_1) = 2\times\text{Aire}(B_1AA_1)$.

2. .On montre par la même méthode que $\text{Aire}(B_1BC_1) = 2\times\text{Aire}(ABC)$ et que $\text{Aire}(A_1CC_1) = 2\times\text{Aire}(ABC)$, d'où, en sommant les aires, que $\text{Aire}(A_1B_1C_1) = 7\times\text{Aire}(ABC)$.

Exercice 9 :



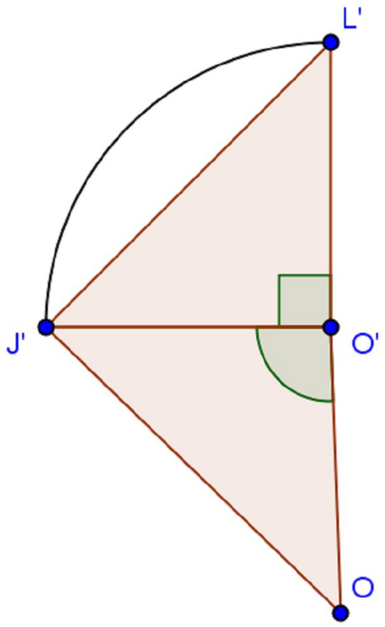


Figure 2

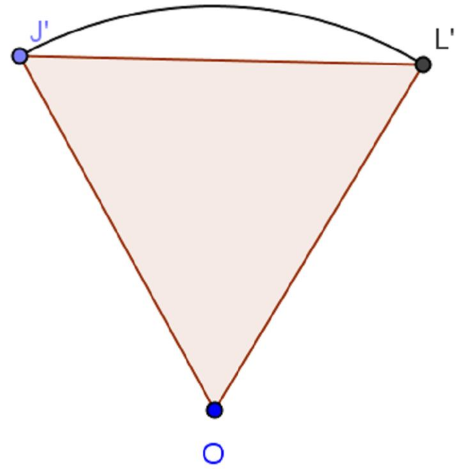


Figure 3

Evaluons tout d'abord la longueur de l'arc $\overset{\frown}{J'L'}$ obtenu sur le parallèle passant par J et $'L'$ (figure 2) : dans le triangle $O'J'L'$, on a $\widehat{J'O'L'} = \frac{\pi}{2}$ et $O'J' = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car dans le triangle rectangle $OO'J'$, on a $\widehat{J'OO'} = \frac{\pi}{4}$, donc ce triangle est rectangle isocèle), donc $l' = \frac{\pi}{4}R\sqrt{2} \approx 6998$ km.

Evaluons ensuite la longueur de l'arc $\overset{\frown}{J'L'}$ obtenu en traçant le grand cercle de centre O passant par J et $'L'$ (figure 3) : il nous faut d'abord évaluer $\widehat{J'OL'}$. Or $J'L' = OJ' = OL' = R$ (on calcule $J'L'$ dans le triangle $O'J'L'$), donc le triangle $OJ'L'$ est équilatéral, d'où $\widehat{JOL'} = \frac{\pi}{3}$.

On en déduit que $l'' = \frac{\pi}{3}R \approx 6597$ km. On a donc $l'' < l'$, avec $\frac{l'}{l''} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1{,}06$, soit 6% d'écart.