**Exercice 2** (*5 points*)

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.

1. Calculer $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel.
   Placer les points $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ sur une figure.

2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang $n_0$ tous les points $A_n$ appartiennent-ils au disque de centre $O$ et de rayon 0,1 ?

4. *a.* Établir que, pour tout entier naturel $n$, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
   En déduire la nature du triangle $OA_nA_{n+1}$.
   *b.* Pour tout entier naturel $n$, on note $\ell_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer $\ell_n$ en fonction de $n$. Quelle est la limite de la suite $(\ell_n)$ ?

**Tournez la page S.V.P.**