Durée : 4 heures

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : *Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. La fonction $F : x \longmapsto \ln(2x+4)$ est une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction f définie par :

- $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$
- $f(x) = \dfrac{1}{2x+4}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 3x\text{e}^{x^2}\,\text{d}x$ est égale à :

- $6(\text{e}-1)$
- $\dfrac{3}{2}(\text{e}-1)$
- $\dfrac{3}{2}\text{e}$

3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x + 1$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonorrnal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :

- $(2\,;\,0)$
- $(1\,;\,-1)$
- $\left(2\,;\,\dfrac{3}{2}-\ln 2\right)$

4. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 2x + \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

- $y = 0$
- $y = 2x - \ln 2$
- $y = 2x$.

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. **a.** Construire le nuage de points de coordonnées $(a_i,\ y_i)$ dans le plan muni du repère orthogonal suivant

– sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm,

– sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm.

b. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?

2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

a. Compléter sur la feuille annexe le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

On donnera pour t des valeurs arrondies au millième.

b. Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième.

c. En déduire la relation : $y = 61,3\ln x - 197$.

d. Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ?

e. À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera-t-elle supérieure à 60 % ?

EXERCICE 2 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise désire construire dans son hall d'entrée un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de hauteur 5 dm (décimètres).

Ses deux autres dimensions, exprimées en dm, sont des entiers naturels x et y tels que

$$x \in]0\ ;\ 20[\quad \text{et} \quad y \in]0\ ;\ 20[.$$

La structure de cette construction est un bâti métallique correspondant aux 12 arêtes du pavé droit et nécessitant des réglettes d'aluminium dont le prix de revient est de $0,8$ euro le dm.

Les quatre parois verticales et le fond de cet aquarium sont construits en verre.

PARTIE A :

On décide d'investir exactement 80 euros pour la construction du bâti métallique.

1. Montrer que, pour cet investissement, les dimensions x et y sont liées par la contrainte $x + y = 20$.
2. **a.** Déterminer en fonction de x et y le volume V, exprimé en dm^3, de cet aquarium.

   b. En déduire le volume V en fonction de x sous la contrainte précédente.
3. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 20[$ par $f(x) = V$.

   a. Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]0\ ;\ 20[$.

   b. En déduire les dimensions de l'aquarium peur que son volume soit maximal ainsi que la valeur de ce volume maximal.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0\ ;\ 20[$ et tout $y \in]0\ ;\ 20[$ par :

$$g(x,\ y) = xy + 10(x + y).$$

On donne en annexe la représentation graphique de la surface d'équation $z = g(x,\ y)$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Quelle est la nature de la section de cette surface par le plan d'équation $x = 12$, parallèle au plan $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$? Justifier la réponse.
2. Montrer que $g(x,\ y)$ représente en fonction des dimensions x et y l'aire S, exprimée en dm^2, de la surface vitrée de l'aquarium.

3. On suppose pour cette question que $x = 12$.

a. Calculer l'aire de la surface vitrée de l'aquarium dans le cas où la contrainte de la partie A est respectée.

b. Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de y pour lesquelles l'aire est comprise entre 400 et 500 dm^2.

c. Vérifier le résultat précédent en utilisant le résultat de la question 1.

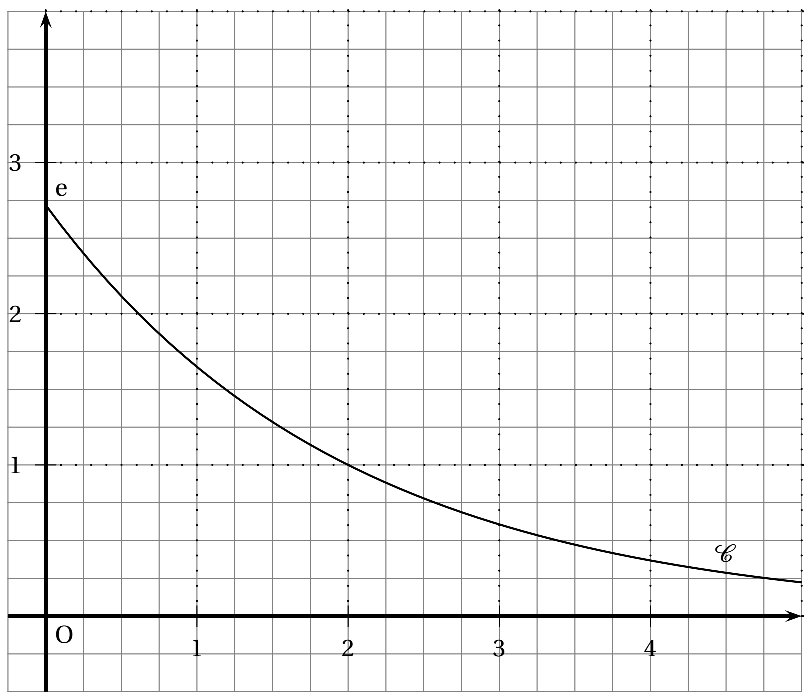
EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}$$

dans un repère orthonormé du plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.



1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Tracer T sur le graphique de la feuille annexe.

2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 2.$$

a. Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

b. Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. **a.** Hachurer sur le graphique de la feuille annexe le domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des ordonnées.

b. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête.

On note :

- A_1 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au premier feu ».
- A_2 l'évènement : « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ les évènements contraires des évènements A_1 et A_2.

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\dfrac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\dfrac{1}{3}$.
   - **a.** Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ?
   - **b.** Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ?
2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\dfrac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\dfrac{1}{3}$.
   - **a.** Illustrer cette situation par un arbre pondéré.
   - **b.** Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\dfrac{1}{3}$.
   - **c.** Calculer $P\left(A_1 \cap A_2\right)$ et $P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$; en déduire $P\left(A_2\right)$.
   - **d.** L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ?
3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet.
   - **b.** Déterminer la durée moyenne du trajet.

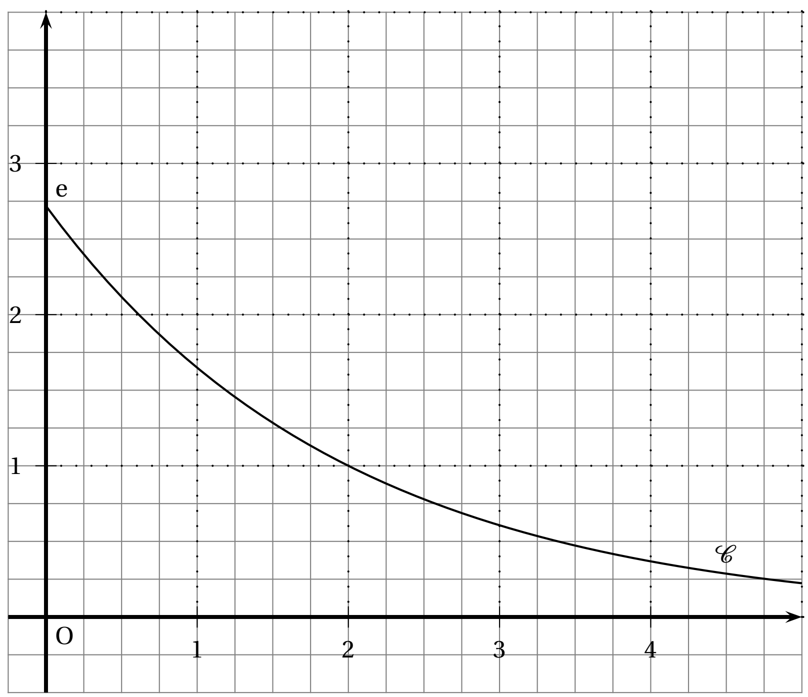
Annexes à rendre avec la copie

Enseignement obligatoire

Exercice 2

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

Exercice 3



Spé ES Antilles Guyanne Septembre 2007