Equations Différentielles

Table des matières

1 Généralités

Définition 1.1 *Une **équation différentielle** est une relation entre une fonction dépendant d'une variable réelle, et ses dérivées successives.*

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer toutes les fonctions f solutions de cette équation.

Exemple 1.2 $f''(x) + 2f'(x) - xf(x) = e^x$ est une équation différentielle. Pour alléger les notations, on écrit plutôt $y'' + 2y' - xy = e^x$, sachant que y représente une fonction de la variable x.

Définition 1.3 *Une équation différentielle **linéaire** est une équation différentielle de la forme $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, où $a_n, ..., a_0, b$ sont des fonctions à valeurs réelles données.*

*b est le **second membre** de l'équation différentielle.*

n est l'ordre de l'équation différentielle.

*$a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ est l'équation **homogène** associée (ou **équation sans second membre**).*

Exemple 1.4

- $y'' + xy' + y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 2.
- $(y')^2 + y = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 1.
- $y^{(4)} + x^3y' + ln(x)y = x^2 + 1$ est une équation différentielle linéaire, d'ordre 4.
- $y'' + ln(y) = 2$ est une équation différentielle non linéaire, d'ordre 2.
- En électricité, l'intensité du courant en fonction du temps dans un circuit (L,R) vérifie l'équation différentielle suivante : $Li'(t) + Ri(t) = e(t)$, encore notée $L\dfrac{di}{dt} + Ri = e$

Théorème 1.5 *Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire (E) :*

On note (E_0) l'équation sans second membre associée.

1. *On résoud l'équation sans second membre associée (E_0)*
2. *On cherche une solution particulière de l'équation (E)*
3. *Les solutions de (E) sont obtenues en ajoutant les solutions de (E_0) à la solution particulière de (E).*

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$

On se place sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas, et où a, b et c sont dérivables.

2.1 Equation sans second membre $(E_0) : a(x)y' + b(x)y = 0$

L'équation (E_0) est équivalente sur I à $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = 0$.

Propriété 2.1 ***Résolution de l'équation homogène*** (E_0) *: Les solutions de* (E') *sont les fonctions* $x \mapsto ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$*, où* k *est un réel quelconque et* $\int \frac{b(x)}{a(x)}dx$ *représente une primitive de la fonction* $\dfrac{b}{a}$.

Exemple 2.2 $(E_0) : y' + x^2y = 0$

Une primitive de $\frac{b}{a}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{x^3}{3}}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2.2 Solution générale de l'équation avec second membre (E)

Propriété 2.3 ***Principe de superposition des solutions*** *Si le second membre* $c(x)$ *s'écrit* $f(x)+g(x)$*, on peut chercher une solution particulière* y_f *(respectivement* y_g*) de l'équation dont le second membre est* $f(x)$ *(respectivement* $g(x)$*), puis une solution particulière de* (E) *s'obtient additionnant ces deux solutions particulières :* $y_f + y_g$.

Théorème 2.4 *Une fois les solutions homogènes* y_0 *et la solution particulière* y_1 *déterminées, leur somme est la solution générale de l'équation différentielle* (E).

Exemple 2.5 $xy' + 2y = 3x + 2$ sur $]0; +\infty[$.

1. Equation sans second membre : $(E_0) : y' + \frac{2}{x}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln x$ donc les solutions de (E_0) sont les fonctions $y_0 : x \mapsto ke^{-2\ln x} = \frac{k}{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(x) = ax + b$: $y_1'(x) = a$ et en remplaçant on obtient : $a = 1$ et $b = 1$. Donc $y_1(x) = x + 1$.
3. La solution générale de $xy' + 2y = 3x + 2$ est donc $y(x) = \frac{k}{x^2} + x + 1, k \in \mathbb{R}$.

Propriété 2.6 ***Recherche d'une solution particulière de l'équation*** (E) ***lorsque l'équation est à coefficients constants :***$ay' + by = c(x)$

- *Si* $c(x)$ *est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré.*
- *Si* $c(x)$ *est un sinus, cosinus ou combinaison linéaire de sinus et cosinus, on cherche une solution particulière sous la forme d'une combinaison linéaire de sinus et cosinus.*
- *Si* $c(x)$ *est une exponentielle-polynôme* $P(x)e^{\lambda x}$*, on cherche une solution particulière sous la forme d'une exponentielle-polynôme* $Q(x)e^{\lambda x}$ *(attention deg(*Q*) n'est pas nécessairement égal à deg(*P*)).*
- *Si* $c(x)$ *est une exponentielle-sinus* $\sin(\omega x)e^{\lambda x}$ *ou exponentielle-cosinus* $\cos(\omega x)e^{\lambda x}$*, on cherche une solution particulière sous la forme* $(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\lambda x}$.

2.3 Rajout d'une condition initiale

On rajoute parfois une condition du type $f(x_0) = y_0$ à l'équation différentielle. Il suffit alors de déterminer l'unique réel k qui permet de satisfaire cette condition.

Exemple 2.7 Résoudre $xy' + 2y = 3x + 2$ sur $]0; +\infty[$ puis trouver la solution g telle que $g(1) = 0$.

On a trouvé $y(x) = \frac{k}{x^2} + x + 1, k \in \mathbb{R}$. La condition initiale donne $\frac{k}{1^2} + 1 + 1 = 0$ donc $k = -2$. D'où $g(x) = -\frac{2}{x^2} + x + 1$.

2.4 Exercices

Exercice 1 Résoudre $2y' + 3xy = x$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Solution : $y(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{4}x^2})$.

Exercice 2 Résoudre $y + y' = \cos(2x)e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto A\cos(2x)e^{3x} + B\sin(2x)e^{3x}$ avec A et B à déterminer.

Solution : $y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{5}\cos(2x)e^{3x} + \frac{1}{10}\sin(2x)e^{3x}$.

Exercice 3 Résoudre $(x+1)y' + (x-1)y = -x+1$ sur $]-1; +\infty[$, avec la condition initiale $f(0) = 0$. On cherchera une solution particulière contante, et on pensera à la décomposition en éléments simples pour une primitive de $\dfrac{b}{a}$.

Solution : $f(x) = (x+1)^2e^{-x} - 1$.

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = d(x)$

a, b, c sont des coefficients réels et d une fonction dérivable sur un intervalle I.

3.1 Equation sans second membre (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$

Définition 3.1 *$ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** associée à (E_0). La forme des solutions va dépendre des racines de l'équation caractéristique.*

Théorème 3.2

Discriminant	*Racines de l'équation caractéristique*	*Solutions de (E_0)*
$\Delta > 0$	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	$r_0 \in \mathbb{R}$	$(\lambda + \mu x)e^{r_0 x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$	$e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0$

Solutions :

1. $r_1 = 1$, $r_2 = -3$ et $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. $r_0 = 2$ et $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. Racines complexes $1 + i$ et $1 - i$: $y(x) = e^x(\lambda \cos(x) + \mu \sin(x))$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3.2 Solution générale de l'équation avec second membre (E)

Toutes les propriétés vues au paragraphe similaire concernant les équations linéaires du premier ordre restent valables, en particulier le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Une fois les solutions homogènes y_0 et la solution particulière y_1 déterminées, leur somme y_0+y_1 donne la solution générale de l'équation différentielle (E).*

Exemple 3.4 Résoudre $y'' + 3y' = 6x - 1$.

Equations caractéristique : $r^2 + 3r = 0$ dont les racines sont 0 et -3.

La solution de l'équation homogène est : $y_0(x) = \lambda e^{0x} + \mu e^{-3x} = \lambda + \mu e^{-3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le second membre étant un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme $y_1(x) = Ax^2 + Bx + C$ (de degré 2 car 0 est solution de l'équation caractéristique, voir propriété suivante).

$y_1'(x) = 2Ax + B$ et $y_1''(x) = 2A$.

En remplaçant on obtient $2A+3(2Ax+B) = 6x-1$ d'où $6Ax+(2A+3B) = 6x-1$.

$6A = 6$ et $2A + 3B = -1$ donne : $A = 1$ et $B = -1$. C peut être choisi arbitrairement, par exemple $C = 0$.

La solution générale de l'équation différentielle est donc : $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = \lambda + \mu e^{-3x} + x^2 + x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Propriété 3.5 ***Précision concernant le second membre exponentielle-polynôme*** *: Si le second membre s'écrit $P(x)e^{\lambda x}$ où P est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme :*

1. *$Q(x)e^{\lambda x}$ si λ n'est pas une racine de l'équation caractéristique*
2. *$xQ(x)e^{\lambda x}$ si λ est une racine simple de l'équation caractéristique*
3. *$x^2Q(x)e^{\lambda x}$ si λ est une racine double de l'équation caractéristique*

Dans les trois cas Q est un polynôme de même degré que P.

3.3 Rajout d'une condition initiale

Pour les équations du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes λ et μ. Il s'agit généralement de valeurs pour $y(0)$ et $y'(0)$.

Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+y = 4e^{-x}$ avec les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax^2e^{-x}$.

Solution : $y(x) = (\lambda + \mu x + 2x^2)e^{-x}$ puis avec les conditions initiales $y(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}$.

4 Exercices

4.1 Enoncés

Exercice 6 Résoudre $(e^x - 1)y' - e^x y = 0$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7 Résoudre $y' + y = x - e^x + \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Résoudre $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$. On montrera que $x \mapsto \dfrac{-x}{1+x^2}$ est une solution particulière de l'équation.

Exercice 9 Résoudre $(1+t)y' + 2t(1-t)y = 0$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 10 Résoudre $y'' + 2y' + y = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 On a ω et ω_0 deux réels distincts strictement positifs. Résoudre $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ sur $\mathbb{R}$, en ajoutant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

4.2 Solutions

Exercice 6

Solution : $y(x) = \dfrac{k}{e^x - 1}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Solution : en cherchant les solutions particulières successivement pour les trois parties du second membre (polynôme, exponentielle, sin-cos) (principe de superposition), on obtient $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Solution : $y(x) = \dfrac{k-x}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Solution : $y(t) = ke^{-u(t)}$ avec $u(t) = -t^2 + 4t - 4\ln(1+t)$, $k \in \mathbb{R}$.

On a utilisé que $\dfrac{2t(1-t)}{1+t}$ se décompose en éléments simples sous la forme suivante : $-2t + 4 - \dfrac{4}{1+t}$, puis on a cherché une primitive.

En simplifiant on obtient : $y(t) = k(1+t)^4 e^{t^2-4t}$.

Exercice 10

Solution : $y(x) = (k_1 x + k_2)e^{-x} + \dfrac{x-1}{4}e^x$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

Solution : $y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x)$.

Les conditions initiales donnent $A = \dfrac{\omega_0^2}{1+\omega_0^2}$ et $B = 0$.