Algèbre Linéaire

Table des matières

1 Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Définition 1.1 *E est un ensemble non vide. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si il existe :*

- *une opération interne $+$(entre éléments de E) telle que pour tous éléments $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de E :*
  - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(communtativité de +)*
  - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(associativité de +)*
  - *il existe $\vec{0} \in E$ tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est élément neutre pour +)*
  - *il existe $\vec{u'} \in E$ tel que $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$ (tout élément possède un opposé dans E)*
- *une opération externe . (entre réels et éléments de E) telle que pour tous réels λ, μ et tous éléments $\vec{u}, \vec{v}$ de E :*
  - $(\lambda + \mu).\vec{u} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{u}$ *(distributivité du + des réels)*
  - $\lambda.(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda.\vec{u} + \lambda.\vec{v}$ *(distributivité de . sur le + des vecteurs)*
  - $(\lambda\mu).\vec{u} = \lambda.(\mu.\vec{u})$ *(associativité de .)*
  - $1.\vec{u} = \vec{u}$ *(le "1" réel est élément neutre pour .)*

Remarque

- Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les **scalaires**, ceux de E les **vecteurs**.
- On dit que E est un $\mathbb{R}$-ev, et en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ on obtient un $\mathbb{C}$-ev. On notera plus simplement ev.

Exemple 1.2

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ sont des ev.
  Rappel : $\mathbb{R}^2$ s'identifie à l'ensemble des vecteurs du plan à deux coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbb{R}^3$ à l'ensemble des vecteurs de l'espace à trois coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}$-ev.
- l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Définition 1.3 *Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. L'élément $\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n \in E$ est une* ***combinaison linéaire*** *de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.*

1.2 Base d'un espace vectoriel

Définition 1.4 *Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ est* ***libre*** *si aucun des vecteurs $\vec{u}_i$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*

Elle est ***génératrice*** *si tout vecteur $\vec{u}$ de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.*

Une famille de vecteurs $\mathcal{B}$ de l'ev E est une ***base*** *de E si c'est une famille libre et génératrice de E : tout vecteur de E s'écrira donc de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.*

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E et que $\vec{x} \in E$ s'écrit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les ***composantes*** *de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple 1.5 Dans l'ev $\mathbb{R}^2$, un vecteur s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en choisissant $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on peut écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$, donc $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On l'appelle **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 Donner la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Théorème 1.6 *Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la* ***dimension*** *de E, noté $\dim(E)$.*

Remarque Un espace vectoriel n'est pas toujours de dimension finie (exemple : l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: il n'y a pas un nombre fini de fonctions continues qui permette d'engendrer cet ev).

Exemple 1.7 $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\mathbb{R}^n$ est de dimension n. Sa base canonique est notée

$$(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

.

Exercice 2 Donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Donner les composantes de $P(X) = 2X^2 - 1$ dans cette base.

2 Applications linéaires

Définition 2.1 *E et F étant deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow F$ est une* ***application linéaire*** *si : pour tous éléments $\vec{u}, \vec{v}$ de E et tous réels λ, μ on a :*

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \text{ et } f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

ou encore en rassemblant les deux conditions :

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

Définition 2.2 *L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*

L'ensemble des applications linéaires de E vers lui-même (les ***endomorphismes****) est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Ce sont eux-mêmes des espaces vectoriels.

Propriété 2.3 *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a les propriétés suivantes :*
- *$f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$ (en utilisant $\lambda = -1$)*
- *$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ (car $f(\vec{u} - \vec{u}) = f(\vec{u}) - f(\vec{u}) = \vec{0}_F$)*
- *l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images, c'est-à-dire :*
$$f(\lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + \lambda_n f(\vec{u}_n)$$

Exemple 2.4

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \end{array}$$ où a est un réel. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

En effet, f s'écrit aussi $f(\vec{u}) = a\vec{u}$ où $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ donc f est évidemment linéaire.

(Remarque : f est une homothétie vectorielle de rapport a).

Exercice 3

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x+y \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

3 Matrice d'une application linéaire

On se place dans les espaces vectoriels du type $\mathbb{R}^n$, même si la théorie qui suit est valable dans tout ev de dimension n.

3.1 Un exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont respectivement notées $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Connaitre f, c'est connaitre les composantes dans $\mathcal{B}_2$ de l'image des trois vecteurs de $\mathcal{B}_3$, puisque tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_3$, et que tout vecteur $f(\vec{u})$ s'écrira aussi comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_2$.

Supposons que $f(\vec{i}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$, $f(\vec{j}) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$ et $f(\vec{k}) = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = g\vec{e}_1 + h\vec{e}_2$, avec a, b, c, d, g, h réels, la matrice de $f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_3) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$ est le "tableau" à 2 lignes et 3 colonnes noté

$$A = \begin{pmatrix} a & c & g \\ b & d & h \end{pmatrix}$$

Les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ images par f des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}_3$, exprimées dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_2$.

Exercice 4 1. Interpréter géométriquement dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, les applications de matrices respectives $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

2. Interpréter géométriquement dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'application de matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

3.2 Image d'un vecteur quelconque, en utilisant la matrice

f est l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & c & g \\ b & d & h \end{pmatrix}$, et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de composantes x, y, z dans la base canonique $\mathcal{B}_3$.

Pour obtenir les composantes de $\vec{v} = f(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{B}_2$, on procède ainsi : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donc $\vec{v} = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k}) = x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} ax + by + gz \\ bx + dy + hz \end{pmatrix}$

On a effectué un "produit matriciel" : le vecteur $\vec{u}$ étant identifié à la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AU = \begin{pmatrix} a & c & g \\ b & d & h \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + gz \\ bx + dy + hz \end{pmatrix}$.

Nous allons définir précisément les opérations sur les matrices.

4 Opérations sur les matrices

4.1 Différents types de matrices

Définition 4.1 ***Matrice à n lignes et p colonnes***

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (matrices $n \times p$) se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ alors la matrice de f relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sera une matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \mathcal{M}at_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $A = (a_{ij})_{n,p}$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq p$.

Définition 4.2 ***Matrice nulle***

Si pour tous i, j, $a_{ij} = 0$, A *est appelée matrice nulle.*

Définition 4.3 ***Matrice ligne*** *(ou vecteur ligne)*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

Définition 4.4 ***Matrice colonne*** *(ou vecteur colonne)*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Définition 4.5 ***Matrice carrée***

Lorsque $n = p$. *L'ensemble des matrices carrées* $n \times n$ *se note* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4.6 ***Matrice triangulaire supérieure et inférieure***

$$T_s = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 4.7 ***Matrice diagonale***

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 4.8 ***Matrice identité*** *(matrice carrée de taille n)*

La matrice I_n *est associée à l'application identité* $\begin{array}{rccc} id_{\mathbb{R}^n} : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 4.9 ***Transposée d'une matrice***

La transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{n,p}$ *de taille* $n \times p$ *est la matrice* ${}^tA = (b_{ij})_{p,n}$ *de taille* $p \times n$, *où* $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Seuls les coefficients a_{11} *et* a_{22} *qui valent* 1 *et* 5 *n'ont pas "bougé".*

Définition 4.10 ***Matrice symétrique***

La matrice carrée $A = (a_{ij})_{n,n}$ *est symétrique si* $a_{ij} = a_{ji}$.

Dans ce cas, ${}^tA = A$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.2 Addition de matrices

Propriété 4.11 *Si* $A = (a_{ij})_{n,p}$ *et* $B = (b_{ij})_{n,p}$ *sont deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *alors*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n,p}$$

Exemple 4.12 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Propriété 4.13 *Si f et g sont deux applications linéaires de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B})$ vers $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}')$, de matrices respectives A et B, alors $f+g$ définie par $(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u})$ est aussi linéaire et sa matrice est $A+B$.*

Exercice 5 Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.3 Multiplication par un scalaire

Propriété 4.14 *Si $A = (a_{ij})_{n,p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un réel (ou complexe) alors*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n,p}$$

.

Exemple 4.15 $2 \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Propriété 4.16 *Si f est une application linéaire de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B})$ vers $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}')$, de matrice A, et λ un scalaire alors λf définie par $(\lambda f)(\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ est aussi linéaire et sa matrice est λA.*

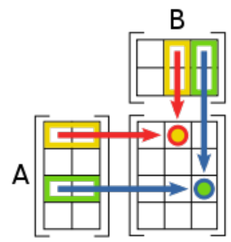
4.4 Produit de matrices

Exemple 4.17 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: pour calculer $A \times B$ on utilise la disposition suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

On obtient $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ qui est une matrice 2×2.

Schéma :



Propriété 4.18 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B sont identiques et le produit AB est possible et $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.*

Si $AB = (c_{ij})_{n,q}$, on obtient le coefficient c_{ij} de AB en effectuant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

Propriété 4.19 *Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ sont deux applications linéaires de matrices respectives $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $f \circ g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ a pour matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.*

Exercice 6 Calculer AB et BA si c'est possible dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4.5 Propriétés

Pour tous a, b réels et A, B, C matrices de tailles compatibles, on a :

$A + B = B + A$	$AB \neq BA$ (en général)
$(a + b)A = aA + bA$	$a(bA) = (ab)A = abA$
$(AB)C = A(BC) = ABC$	$(aA)B = A(aB) = a(AB) = aAB$
$A(B + C) = AB + AC$	$a(A + B) = aA + aB$
$A = 0$ ou $B = 0 \Rightarrow AB = 0$	$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ (en général)

4.6 Exercices

Exercice 7

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Donner la matrice A de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer l'image du vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la définition de f, puis en utilisant le produit de X par A.

Exercice 8

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer la matrice de f dans la base de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 9 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et montrer que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire une matrice B telle que $AB = I$.

Remarque : cette matrice B s'appelle l'inverse de A.

5 Déterminant des matrices carrées

5.1 Matrice carrée de taille 2

Définition 5.1 $det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Exemple 5.2 $det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$

5.2 Matrice carrée de taille 3

Définition 5.3 ***Méthode des cofacteurs***

On peut calculer le déterminant d'une matrice 3×3 en "développant" par rapport à une ligne et en se ramenant à des déterminants de matrice 2×2 :

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *: On attribue aux coefficients de A un signe $+$ ou $-$ en commençant par $+$ en haut à gauche de la façon suivante :* $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

On développe selon la première ligne : on affecte à chaque coefficient le signe qui lui a été attribué et on supprime la ligne et colonne auxquelles appartient le coefficient :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Exercice 10 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la première ligne puis la première colonne.

5.3 Généralisation : déterminant des matrices de taille n par la méthode des cofacteurs

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice de taille n.

On note A_{ij} la matrice de taille $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Définition 5.4
*Le **mineur** de (i,j) est $\Delta_{ij} = det(A_{ij})$ le déterminant de la matrice A_{ij}.*
*Le **cofacteur** de (i,j) est $C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ (c'est un nombre).*

En pratique le tableau du signe attibué à un cofacteur est donné par :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots \\ - & + & - & \cdots & \cdots \\ + & \cdots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix}$$

Les cofacteurs permettent de réaliser le développement selon une ligne ou une colonne de la matrice A de départ :

- Développement selon la ligne i :
  $det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$.
- Développement selon la colonne j :
  $det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$.

Exemple 5.5 Pour calculer le déterminant de cette matrice on développe par exemple par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6^{-} & -1^{+} & 1^{-} \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \times -7 + (-1) \times 14 - 1 \times 14 = -70$$

5.4 Propriétés du déterminant

Propriété 5.6

1. *Si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul*
2. *La valeur du déterminant ne change pas si on rajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. colonnes).*
3. *Si deux lignes ou colonnes sont identiques alors le déterminant est nul.*
4. *Si on multiplie une ligne ou une colonne par un réel λ alors le déterminant est aussi multiplié par λ.*
5. *Si on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.*

Propriété 5.7

- *Si A est une matrice diagonale, triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure alors le déterminant est le produit des coefficients diagonaux :*
  $det(A) = a_{11} \times \cdots \times a_{nn}$.
- $det(AB) = det(A)det(B)$

En pratique, on essaie de combiner les lignes entre elles pour faire apparaitre le plus grand nombre de 0 possibles, puis on développe par rapport à cette ligne ou colonne.

Exercice 11 Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ en faisant apparaitre simplement deux 0 dans la dernière colonne.

6 Inversibilité des matrices carrées

6.1 Matrice inversible

Définition 6.1 *Une matrice carrée de taille $n \times n$ est inversible s'il existe une matrice B telle que :*

$$AB = BA = I$$

B est unique ; B est l'inverse de A et A est l'inverse de B. On note A^{-1} l'inverse de A.

Propriété 6.2 *$f : E \to E$ est un endomorphisme, de matrice A relativement à une base $\mathcal{B}$.*

A inversible $\Leftrightarrow$ f bijective

Dans ce cas, la matrice associée à f^{-1} (la réciproque de f) relativement aux mêmes bases est A^{-1}.

Remarque La matrice identité est inversible et $I^{-1} = I$. En effet, $I \times I = I$.

Propriété 6.3 *A inversible $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.*

6.2 Calcul de la matrice inverse

Définition 6.4 *La* ***comatrice*** *d'une matrice A, notée $Com(A)$, est la matrice des cofacteurs.*

Si C_{ij} est le cofacteur associé au coefficient (i, j) de A, alors

$$Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer l'inverse d'une matrice, l'une d'elle est d'utiliser la formule suivante :

Théorème 6.5 *Si A est inversible,* $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)}\ {}^tCom(A)}$.

Exemple 6.6 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors $det(A) = 10$, $Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ donc ${}^tCom(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et : $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$.

6.3 Exercices

Exercice 12 Montrer que l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est $-\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -12 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 13 Inverser si possible les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$.
2. Montrer que A est inversible puis calculer son inverse de deux façons :
   (a) en utilisant la formule
   (b) en utilisant la relation de la question 1.

Exercice 15 Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 3y + z \\ -y + z \\ 2x + 5y + 2z \end{pmatrix} \end{array}$ une application linéaire.

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Calculer A^{-1}.
3. En déduire que l'application réciproque de f est $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -7x - y + 4z \\ 2x - z \\ 2x + y - z \end{pmatrix} \end{array}$

7 Solution des exercices

Exercice 7 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2. $f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 9

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A^2 - A = 2I$ donc $\dfrac{1}{2}A(A-I) = I$:

on peut choisir $B = \dfrac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11

$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ en ajoutant la première colonne à la dernière.

Ce qui donne $d = 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Exercice 12 On calcule dans l'ordre : $det(A), Com(A)$ puis ${}^tCom(A)$ et enfin A^{-1}.

$det(A) = -14$ en développant par exemple par rapport à la première ligne,

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & -4 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc ${}^tCom(A) = \begin{pmatrix} -12 & 8 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et la réponse donnée.

Exercice 13

A est inversible lorsque tous ses coefficients sont non nuls et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$.

B est toujours inversible car $det(B) = 1$ et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$det(C) = c(a^2 + b^2)$ donc C est inversible si $(c \neq 0)$ ou (a ou b différent de 0).

Alors $C^{-1} = \dfrac{1}{c(a^2+b^2)} \begin{pmatrix} ac & bc & 0 \\ -bc & ac & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14

$A^2 - 3A + 2I = 0$. $det(A) = 2$ donc A est inversible. On obtient $3A - A^2 = 2I$ donc $A \times \frac{1}{2}(3I - A) = I$ et $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Même réponse avec la formule.

Exercice 15

$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. On calcule $A^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$