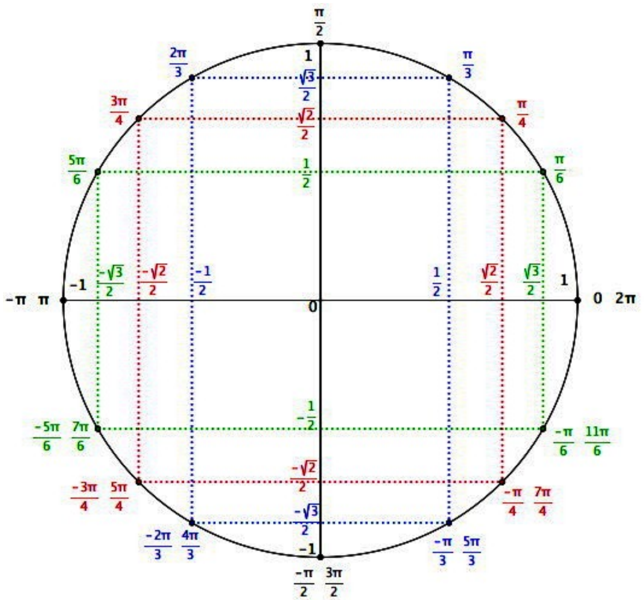
Nombres complexes

Table des matières

1 Rappels de trigonométrie

1.1 Le cercle trigonométrique, sinus et cosinus remarquables



C'est un cercle orienté de rayon 1. Les cosinus des angles en radian se lisent sur l'axe des abscisses, les sinus sur l'axe des ordonnées.

1.2 Propriétés trigonométriques

Propriété 1.1 *Pour tout x réel, pour tout k entier relatif,*

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ *(cos et sin sont 2π-périodiques)*
- $\cos(-x) = \cos(x)$ *et* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *(cos est paire et sin est impaire)*
- $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi) = -\cos(x)$ *et* $\sin(x + \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin(x)$

Exemple 1.2 $\cos(\frac{7\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Propriété 1.3 *Formules d'addition :*

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

1.3 Equations trigonométriques du type $\cos(a) = b$ ou $\sin(a) = b$

Exemple 1.4 Résoudre l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour cela, on se sert du cercle trigonométrique et du fait que les angles ayant un cosinus de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont opposés et égaux à $\frac{3\pi}{4}$ ou $-\frac{3\pi}{4}$, à 2π près. Les solutions sont donc $S = \{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 2.1 *Un nombre complexe, souvent noté z, est un nombre de la forme $x+iy$, où x et y sont deux nombres réels et i un nombre imaginaire possédant la propriété suivante : $i^2 = -1$.*

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

*$x+iy$ est la **forme algébrique** de z.*

*x est appelé **partie réelle** de z et notée $Re(z)$.*

*y est appelé **partie imaginaire** de z et notée $Im(z)$ (attention le partie imaginaire est un réel, i n'en fait pas partie).*

Exemple 2.2 Si $z = 2+4i$, $Re(z) = 2$ et $Im(z) = 4$. Si $z = \frac{1}{2}i$, $Re(z) = 0$ et $Im(z) = \frac{1}{2}$

Remarque *En électricité, i se note j pour ne pas confondre avec l'intensité.*

Propriété 2.3 *Un nombre réel x peut s'écrire $x+0i$ donc c'est aussi un nombre complexe : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

*Un complexe dont la partie réelle est nulle est appelé **imaginaire pur** (par exemple : $-3i$).*

Définition 2.4 *Le nombre complexe $x-iy$ est appelé **conjugué** de z et noté $\overline{z}$: $\overline{z} = x-iy$.*

Exemple 2.5 Le conjugué de $3-4i$ est $3+4i$.

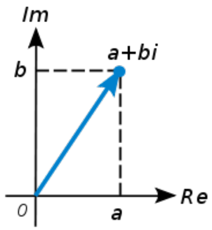
3 Représentation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, à tout point M de coordonnées $(x;y)$ on associe de façon unique le nombre complexe $z = x+iy$, et réciproquement.

z s'appelle alors **l'affixe** de M, et M le **point image** de z.

Par exemple, les réels sont représentés par l'axe des abscisses et les imaginaires purs par l'axe des ordonnées.

Un point du plan complexe d'affixe $a+ib$:



Remarque *Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a aussi pour affixe z.*

Exercice 1 Pour quelles valeurs de x le nombre complexe $z = x-1+i(2-x^2)$ est-il :

1. réel
2. imaginaire pur
3. l'affixe du point A de coordonnées $(-3;-2)$

4 Opérations sur les nombres complexes

4.1 Opérations

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux nombres complexes, en pensant à utiliser $i^2 = -1$:

Exemple 4.1

Addition : $2+3i-6+8i=...$

Multiplication : $(2+3i)(-8+i)=...$

Quotient : Pour mettre un quotient $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on multiplie haut et bas par $\overline{z'}$ le conjugué de z' :

$\frac{5i}{1+i}=\frac{5i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5i-5i^2}{1-i^2}=\frac{5i+5}{1+1}=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$ car $i^2=-1$.

$\frac{2+3i}{2-i}=...$

Remarque *L'ordre $\leq$ ou $<$ n'existe pas sur $\mathbb{C}$. En particulier dire qu'un nombre complexe est positif ou négatif n'a pas de sens.*

Exercice 2 Calculer $1+i+i^2+...+i^7$.

Exercice 3 Soient les nombres complexes $z=2+3i$ et $z'=-1+i$. Ecrire sous forme algébrique :

1. $2z-3z'$
2. zz'
3. z'^2

Exercice 4 Soient les nombres complexes $z=2-3i$ et $z'=-4-i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres $\frac{1}{z}$ et $\frac{z}{z'}$.

Réponses : $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$ et $-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$

Exercice 5 Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

Réponse : $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

4.2 Egalité de deux nombres complexes

Propriété 4.2 *Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Donc :*

$$\boxed{z=z' \Leftrightarrow Re(z)=Re(z') et\ Im(z)=Im(z')}$$

Exercice 6 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $3x^2+9+2ix=12x+2i$.

4.3 Propriétés du conjugué d'un nombre complexe

Propriété 4.3
1. *$z+\bar{z}=2Re(z)$ donc $z+\bar{z}$ est réel*
2. *$z-\bar{z}=2iIm(z)$ donc $z-\bar{z}$ est imaginaire pur*
3. *z est réel si et seulement si $z=\overline{z}$ (ou $z-\overline{z}=0$).*
4. *z est imaginaire pur si et seulement si $z=-\overline{z}$ (ou $z+\overline{z}=0$).*
5. *Si $z=x+iy$ alors $z\overline{z}=x^2+y^2$.*
6. *pour tout z,z' complexe, on a $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ et $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$*
7. *pour tout $z\neq 0$, $\overline{(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\overline{z}}$*
8. *pour tout z,z' avec $z'\neq 0$, $\overline{(\frac{z}{z'})}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$*

Exercice 7 On donne $z_1=\frac{5+9i}{13-i}$ et $z_2=\frac{5-9i}{13+i}$. Sans calcul, expliquer pourquoi z_1+z_2 est réel, et z_1-z_2 imaginaire pur.

4.4 Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 4.4 *Pour résoudre une équation du type $az^2+bz+c=0$, avec a,b,c réels et $a\neq 0$, On calcule le discriminant de l'équation : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ et :*

- *Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions réelles*

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ et\ z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution réelle*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions réelles mais a deux solutions complexes conjuguées*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemple 4.5 Pour $4z^2 + 3z + 1 = 0$, on obtient $\Delta = -7$ donc les solutions sont complexes et $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{8}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{8}$.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 + 1 = 0$
2. $2z^2 - 1 = 0$
3. $-5z^2 + z - 0,5 = 0$.

Réponses :

1. $S = \left\{ \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} i \right\}$ 2. $S = \left\{ \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ 3. $S = \left\{ \dfrac{1}{10} \pm \dfrac{3}{10} i \right\}$

Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout z, $z^3 - 1 = (z-1)(az^2 + bz + c)$. *On pourra effectuer une division polynômiale.*
3. En déduire les solutions de $z^3 - 1 = 0$.

5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

5.1 Module

5.1.1 Définition

Définition 5.1 ***(Forme trigonométrique)*** *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le **module** de z est le réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$. Il est noté $|z|$ ou souvent r.*

Exemple 5.2 $|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Dans le plan complexe, si M est le point d'affixe z, $|z|$ est aussi la distance OM entre M et l'origine du repère. Géométriquement, on peut donc calculer la distance entre deux points A et B grâce à la formule

$$AB = |z_B - z_A|$$

5.1.2 Propriétés du module

Propriété 5.3 *z et z' étant deux complexes,*

- $z = 0$ *si et seulement si* $|z| = 0$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|\dfrac{1}{z}| = \dfrac{1}{|z|}$ $\quad (z \neq 0)$
- $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\quad (z' \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

Exercice 10 Déterminer le module de $-3i$, $(3+5i)(11-7i)$, $\dfrac{1}{(4+3i)^3}$, $\dfrac{5}{(1-i)^2}$.

Réponses : 3 ; $34\sqrt{5}$; $\dfrac{1}{125}$; $\dfrac{5}{2}$

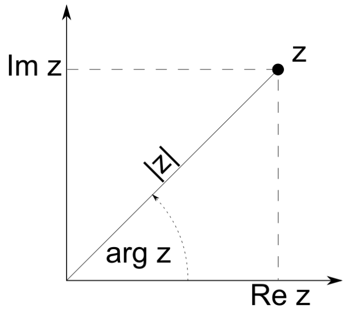
5.2 Argument d'un complexe non nul

5.2.1 Définition

Définition 5.4 *z est un nombre complexe non nul, et M le point image associé à z dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

*On appelle **argument** de z, et on note $arg(z)$ ou souvent θ, une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.*

Un complexe non nul a donc une infinité d'arguments définis modulo 2π.



5.2.2 Comment le calculer

Si $z = x + iy \neq 0$,

- on calcule d'abord $r = |z|$
- le calcul de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ avec les formules suivantes permettront d'en déduire une mesure de l'argument :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{y}{r}}$$

soit en reconnaissant un sinus et cosinus remarquables,
soit en approximant à l'aide de la calculatrice si on ne reconnait pas de valeurs remarquables.

Exemple 5.5 Un argument de $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ est $-\frac{2\pi}{3}$ car :

$$|z| = 4 \text{ et } \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On reconnait le cosinus et le sinus de $-\frac{2\pi}{3}$, d'où $arg(z) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 11 Déterminer un argument de $z = \sqrt{3} - i$.

Exercice 12 Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de $arg(4 - 2i)$.

Réponse : -0,46 rad.

5.2.3 Propriétés d'un argument

Propriété 5.6 *z et z' étant deux nombres complexes non nuls :*

1. *z est un réel strictement positif si et seulement si $arg(z) = 0\ [2\pi]$*
2. *z est un réel strictement négatif si et seulement si $arg(z) = \pi\ [2\pi]$*
3. *z est imaginaire pur si et seulement si $arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$*
4. *$arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$*
5. *$z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $arg(z) = arg(z')\ [2\pi]$*

Propriété 5.7 ***Opérations sur les arguments*** *: z et z' étant deux nombres complexes non nuls :*

1. *$arg(z \times z') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$*
2. *$arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$*
3. *$arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$*
4. *$arg(z^n) = n \quad arg(z)\ [2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Exercice 13 En justifiant que $Z = (2\sqrt{3} - 2) + i(2\sqrt{3} + 2)$ s'écrit $(2 + 2i)(\sqrt{3} + i)$, donner le module et un argument de Z.

5.3 Formes trigonométriques et exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 5.8 ***(Forme trigonométrique)***
Tout nombre complexe z non nul s'écrit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où r est le module de z et θ un argument de z.

Définition 5.9 ***(Forme exponentielle)*** *On pose $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.*

Tout nombre complexe non nul z peut alors s'écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z| > 0$. C'est la forme exponentielle de z.

Exemple 5.10 La forme trigonométrique de i est $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$.

La forme exponentielle de i est $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

La forme exponentielle de -1 est $e^{i\pi}$.

D'après un exemple précédent, la forme exponentielle de $z = -2-2i\sqrt{3}$ est $4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Les propriétés du module et de l'argument peuvent alors s'écrire de façon plus simples :

Propriété 5.11

1. $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r \times r'e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
4. $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

On retrouve en particulier la formule de Moivre : $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$ qui s'écrit aussi

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exercice 14 Ecrire sous forme algébrique : $e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $2e^{4i\pi}$; $\frac{6}{e^{-3i\pi}}$; $\frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Il reste à présenter les formules d'Euler :

Propriété 5.12

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exercice 15 Grâce aux formules d'Euler, linéariser $\cos^3(\theta)$.
Réponse : $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$.

6 Exercices de synthèse

Exercice 16 Calculer $(1+i)^8$ à l'aide de la forme exponentielle de $1+i$.
Réponse : 16.

Exercice 17 Déterminer le module et un argument de $Z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ puis ses parties réelle et imaginaire.

En déduire une valeur exacte de $\cos(\dfrac{5\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{5\pi}{12})$.
Réponse : $\cos(\dfrac{5\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\dfrac{5\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

Exercice 18 Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 9$.

1. Calculer $P(-3)$.
2. Déterminer des réels a, b, c tels que $P(z) = (z+3)(az^2 + bz + c)$.
3. Indiquer les trois racines complexes de $P(z)$ sous forme algébrique puis exponentielle.