Fonctions ln, exp et puissances

Table des matières

1 La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

Définition 1.1 *On appelle* ***logarithme népérien*** *et on note* ln *la primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $]0;+\infty[$ *et qui s'annule en 1 : pour tout* $x \in]0;+\infty[$ *:*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

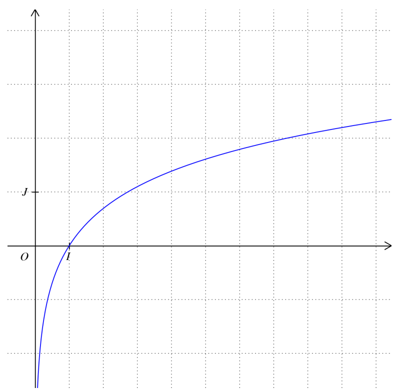
Propriété 1.2

- $\ln 1 = 0$
- *pour tout* $x \in]0;+\infty[$*, ln est dérivable et* $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$
- *ln est donc strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.

Propriété 1.3 *(limites)*

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

1.2 Courbe représentative



1.3 Propriétés algébriques

Propriété 1.4 *Pour $a, b > 0, \alpha$ réel :*

$$\boxed{\begin{array}{cc} \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) & \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a) \\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a) & \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \end{array}}$$

Propriété 1.5 *Le réel qui a pour image 1 par la fonction* $\ln$ *est noté e. On a* $e \simeq 2,71828...$ *et :*

$$\boxed{\ln(e) = 1}$$

Exercice 1 Ecrire sous forme $a \ln b$:

1. $\ln 4$
2. $\ln(\sqrt{3})$
3. $\ln(x+1)$
4. $\ln 2 + \ln(x-1) - \ln(x+1)$

Exercice 2 Ecrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants : $\ln 6$; $\ln 9$; $\ln(\frac{1}{12})$; $\ln \sqrt{12}$; $\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$

2 La fonction exponentielle

2.1 Définition

Définition 2.1 *On appelle **fonction exponentielle** et on note* exp *la fonction réciproque de la fonction* $\ln$.

En effet, $\ln$ est continue et strictement croissante, de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'équation $\ln x = a$ possède une unique solution notée $exp(a)$: on a donc défini $exp(a)$ pour tout a réel.

Propriété 2.2

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$
- *Pour tout* $x > 0$, $\exp(\ln x)) = x$

Remarque *On remarque que, en utilisant la définition de e donnée plus haut, pour tout x réel,* $\ln(e^x) = x$ *et* $\ln(\exp(x)) = x$ *donc par identification* $\exp(x) = e^x$. *On notera dorénavant* e^x *au lieu de* $\exp(x)$.

Propriété 2.3

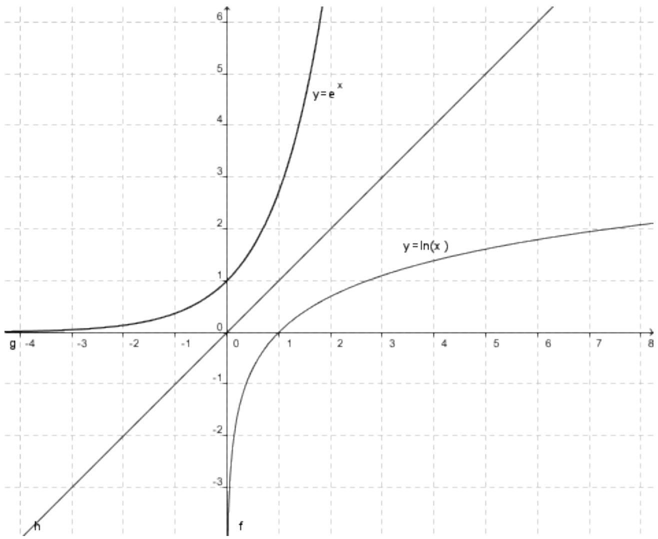
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
- $exp(0) = e^0 = 1$
- $exp(1) = e^1 = e$
- *exp est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$
- *exp est donc strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 2.4 *(limites)*

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

Remarque *On peut aussi définir exp comme étant l'unique fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifie :* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$.

2.2 Courbe représentative



2.3 Propriétés algébriques

Propriété 2.5 *Pour a, b réels :*

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^b = e^{a\times b}$$

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^x \times e^{-x}$
2. $(e^{2x})^2 \times (e^{-x})^2$
3. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$
4. $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{6x-1} \times e^4}$

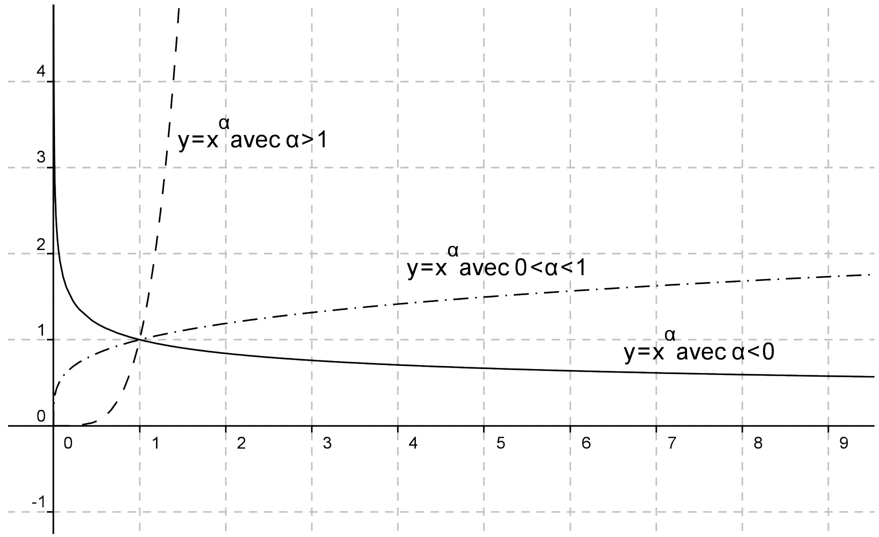
Solution : 1 ; e^{2x} ; 4 ; e^{-4x}

Exercice 4 Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

3 Les fonctions puissance

Définition 3.1 *Pour tout $x > 0$, on a $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.*

Cette définition prolonge la définition des fonctions puissances entières : dans le cas où α est un entier positif, les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}$, dans le cas où α est un entier négatif, les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}^*$.



4 Méthodes particulières

4.1 Résoudre des équations et inéquations avec ln et exp

Propriété 4.1 *Equations/inéquations avec exp*

- *l'équation $e^x = a$, $a > 0$, a pour solution $x = \ln a$*
- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Exemple 4.2 Résoudre $e^{-0,5x+1} - 2 = 0$:
On écrit $e^{-0,5x+1} = 2$ puis on compose chaque membre par ln :
$-0,5x + 1 = \ln 2$ d'où $x = \dfrac{\ln 2 - 1}{-0,5} = 2(1 - \ln 2)$.

Propriété 4.3 *Equations/inéquations avec ln*
Attention il faut d'abord déterminer le domaine d'existence de l'équation/inéquation (domaine où chaque ln sera défini).

- *l'équation $\ln x = a$ a pour solution $x = e^a$*
- $\ln a = \ln b \iff \begin{cases} a = b \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$

- $\ln a < \ln b \Longleftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$

Exemple 4.4 Résoudre $2\ln(x+4) > \ln(2-x)$:

Domaine : on doit avoir $x+4>0$ et $2-x>0$ soit $-4<x<2$.

On écrit $\ln((x+4)^2) > \ln(2-x)$ d'où $(x+4)^2 > 2-x$.

On obtient en développant l'inéquation du second degré suivante : $x^2+9x+14>0$. Les racines de ce trinôme sont -7 et -2 donc les solutions sont $x<-7$ ou $x>-2$.

En prenant en compte le domaine d'existence $-4<x<2$, les solutions sont $-2<x<2$: c'est-à-dire $x \in]-2;2[$.

Exercice 5 Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{4x} - 2e^{3x} = 0$
2. $e^{2x} - 4e^{x} < 0$
3. $\ln(x+2) = \ln(2x+1)$
4. $\ln(x^2) = \ln 2 + \ln(x+1)$

Solution :

1.$S = \{\ln 2\}$ 2.$S =]-\infty; \ln 4]$ 3.$S = \{1\}$ 4.$S = \left\{\sqrt{3}-1; \sqrt{3}+1\right\}$

4.2 Déterminer des limites à base de exp, ln ou puissances

4.2.1 Les indéterminées des polynômes en $+\infty$

Propriété 4.5 *La limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.*
La limite en $\pm\infty$ d'un fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exercice 6 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^5 - 5x^4 + x^2 + 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^4 - x^3 - x^2 + 2}{-x^5 + 3}$

4.2.2 Les indéterminées avec ln et exp

Pour lever les formes indéterminées au voisinage de l'infini, on utilise la croissance comparée des fonctions : exp l'emporte sur les puissances de x qui l'emportent sur ln.

"L'emporter" signifie croitre plus rapidement vers l'infini.

Propriété 4.6 *(Comparaison des fonctions ln, exp et puissances au voisinage de $+\infty$) Pour $\alpha > 0$,*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ \textit{et} \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$$

Propriété 4.7 *(Autres limites indéterminées)*

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \ \textit{et} \ \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0}$$

Exercice 7 Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - \ln x$ (on pourra mettre x^2 en facteur)
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-1)e^{-x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+1}{x^2+1}$ (on pourra mettre e^x et x^2 en facteur)

4.3 Etudier le signe d'une dérivée à base de ln ou exp

Pour établir le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ d'une fonction f, on résoud l'inéquation $f'(x) \geq 0$: les intervalles solution donneront les « + »du tableau de signe. On utilise donc les méthodes de résolution des inéquations avec exp et ln.

Exemple 4.8 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.

Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$:

$1 - 2\ln x \geq 0 \Longleftrightarrow \ln x \leq \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x \leq \sqrt{e}$ et $x > 0$.

Donc sur $]0;\sqrt{e}]$ la dérivée est positive et f est croissante

sur $[\sqrt{e};+\infty[$ la dérivée est négative et f est décroissante

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

5 Exercices de synthèse

5.1 Enoncés

Exercice 8 Ecrire plus simplement :

1. $\ln 2x + \ln 3$
2. $\ln(2x+2) - \ln(x+1)$
3. $(\ln(2x+1) + \ln 2)^2$
4. $e^{\ln 5 - \ln 3}$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln x = -2$
2. $\ln x - \ln(x+1) = \ln 2 + \ln 4$
3. $\ln x > \ln(5x-2)$
4. $(e^x+1)(e^x-3) \geq 0$

Exercice 10 Faire une étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variations, limites) :

1. $f(x) = \ln x - x - 1$
2. $g(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$ (on montrera que $g'(x) = (e^x-1)(2e^x-5)$)

5.2 Solutions

Solution de l'exercice 8 :

$\ln(6x)$; $\ln 2$; $(\ln(4x+2))^2$; $\dfrac{5}{3}$

Solution de l'exercice 9 :

1. $x = e^{-2}$
2. $\ln x - \ln(x+1) = \ln 2 + \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ \ln(\frac{x}{x+1}) = \ln 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ \frac{x}{x+1} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x = -\dfrac{8}{7} \end{cases}$

   On ne peut donc pas accepter cette solution : $S = \varnothing$.
3. $\ln x > \ln(5x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 5x-2 > 0 \\ x > 5x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{5} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

   On retient : $S = \left]\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right[$.
4.

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
e^x+1		$+$		$+$	
e^x-3		$-$	0	$+$	
$(e^x+1)(e^x-3)$		$-$	0	$+$	

Solution de l'exercice 10 :

1.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

2.

x	$-\infty$		0		$\ln\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$2e^x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$g(\ln\dfrac{5}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$