Décomposition en éléments simples

Table des matières

1 Polynômes

1.1 Définition

Définition 1.1

- *Si $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \mathbb{C}$, aX^p est un **monôme** de coefficient a, de degré p et d'indéterminée X.*
- *Un **polynôme** est une somme de monômes de degrés différents : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$.*
- *L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.*
- *Le **degré d'un polynôme** est celui du monôme de degré le plus élevé. Les polynômes constants sont donc de degré 0, sauf le polynôme nul qui n'a pas de degré.*
- *L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{C}_n[X]$.*

1.2 Racines d'un polynôme

On étudie un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ de degré n. a est un nombre réel ou complexe.

Définition 1.2 *a est racine du polynôme P si $P(a) = 0$.*

Propriété 1.3 *Si a est racine de P, alors $(X - a)$ divise P. On peut alors écrire $P = (X - a)Q$ où Q est un polynôme de degré $n - 1$ et on peut donc mettre $(X - a)$ en facteur dans le polynôme P.*

Définition 1.4 *a est racine d'ordre k du polynôme P si $P = (X-a)^kQ$ et $Q(a) \neq 0$. k est **l'ordre de multiplicité** de la racine a.*

Théorème 1.5 *a est racine d'ordre k de P si et seulement si*

$$P(a) = 0, P'(a) = 0, P''(a) = 0, ..., P^{(k-1)}(a) = 0$$

et

$$P^{(k)}(a) \neq 0$$

Pour déterminer l'ordre multiplicité d'une racine a, il suffit de calculer les dérivées successives de P en a, la première non nulle donne l'ordre de multiplicité.

Exercice 1 Vérifier que 2 est une racine de $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 16x + 8$ et donner sa multiplicité.

Définition 1.6 *Un polynôme **irréductible** est un polynôme qui ne se factorise pas.*

1.3 Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles

Théorème 1.7 *Un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$ possède n racines, comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Conséquence : les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Théorème 1.8 *Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ se factorise sous la forme*

$$P(X) = a(X - a_1)^{k_1}...(X - a_p)^{k_p}$$

où a est le coefficient dominant de P et $a_1, ..., a_p$ ses racines d'ordre k.

1.4 Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles

Propriété 1.9 *Si a est une racine complexe non réelle d'ordre k de P, alors $\overline{a}$ est aussi racine d'ordre k.*

En effet, $P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = 0$.

Conséquence : il y a toujours un nombre pair de racines complexes non réelles, donc si P est de degré impair il a au moins une racine réelle.

Théorème 1.10 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les trinômes du second degré à discriminant strictement négatif.*

Remarque Les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif possèdent deux racines complexes conjuguées a et $\overline{a}$: on a

$$(X - a)(X - \overline{a}) = X^2 - (a + \overline{a})X + a\overline{a} = X^2 - 2Re(a)X + |a|^2$$

qui est à coefficients réels, ce qui montre qu'un polynôme à coefficients réels se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 1.11 *Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se factorise sous la forme*

$$P(X) = a(X - a_1)^{m_1}...(X - a_p)^{m_p}(X^2 + b_1X + c_1)^{n_1}...(X^2 + b_jX + c_j)^{n_j}$$

où

- *a est le coefficient dominant de P*
- *$a_1, ..., a_p$ ses racines réelles*
- *les trinômes de la forme X^2+bX+c admettent les racines complexes non réelles conjuguées d'ordre n de P.*

1.5 En pratique

Pour trouver la factorisation sur $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ d'un polynôme $P(x)$, on commence par chercher des racines « évidentes »a en tâtonnant (c'est-à-dire en essayant pour x les valeurs 0, ±1,...). On effectue ensuite la division euclidienne de P par $X - a$.

Exemple 1.12 Factoriser $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$ dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$:
On trouve que $P(1) = 0$ et $P(-2) = 0$, donc $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$ divise $P(x)$.
On effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{rr|l}
x^5 + x^4 - 2\,x^3 & - x^2 - x + 2 & \underline{x^2 + x - 2} \\
\underline{x^5 + x^4 - 2\,x^3} & & x^3 - 1 \\
0 & - x^2 - x + 2 & \\
 & \underline{-x^2 - x + 2} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Or, $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, par conséquent,$P(x) = (x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$.
En effet, $x^2 + x + 1$ est un trinôme du 2^{nd} degré à discriminant négatif.

Exercice 2 Factoriser $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 16x + 8$ dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$ (on rappelle que 2 est racine de multiplicité 2 de P).

2 Fractions rationnelles

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Une **fraction rationnelle** s'écrit $F = \dfrac{A}{B}$ où A et B sont des polynômes. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels se note $\mathbb{R}(X)$.*

Définition 2.2 *Si A et B n'ont pas de racines en commun, F est dite **irréductible**.*

2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle irréductible.

2.2.1 Partie entière et pôles de F

Définition 2.3 *Si deg$(A) \geq$ deg(B) alors le quotient de la division euclidienne de A par B est noté E : c'est la partie entière de F.*

Si deg$(A) <$ deg(B) alors $E = 0$.

On a $A = E \times B + R$ avec deg$(R) <$ deg(B) et donc $F = E + \dfrac{R}{B}$: on est ramené à l'étude de la fraction rationnelle $\dfrac{R(X)}{B(X)}$.

Définition 2.4 *Si $a \in \mathbb{C}$, a est appelé pôle d'ordre n de F si a est racine d'ordre n de B.*

2.2.2 Décomposition en éléments simples de F

Soit $B(X) = a(X - r_1)^{m_1} \cdots (X - r_p)^{m_p}(X^2 + b_1X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_qX + c_q)^{n_q}$ la décomposition en polynômes irréductible de B.

Définition 2.5 *On appelle* ***éléments simples de première espèce*** *relatifs aux pôles r_i, les m_i fonctions rationnelles du type*

$$\frac{A_1}{X - r_i}\ ,\quad \frac{A_2}{(X - r_i)^2}\ ,\quad \cdots\ ,\quad \frac{A_{m_i}}{(X - r_i)^{m_i}}$$

où les A_k sont des constantes réelles.

Définition 2.6 *On appelle* ***éléments simples de seconde espèce*** *relatifs aux polynômes irréductibles $X^2 + b_jX + c_j$, les n_j fonctions rationnelles du type*

$$\frac{B_1\,X + C_1}{X^2 + b_jX + c_j}\ ,\quad \frac{B_2\,X + C_2}{(X^2 + b_jX + c_j)^2}\ ,\quad \cdots\ ,\quad \frac{B_{n_j}\,X + C_{n_j}}{(X^2 + b_jX + c_j)^{n_j}}$$

où les B_k, C_k sont des constantes réelles.

Exemple 2.7 Donnons les éléments simples de

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

- éléments simples de 1^e espèce :
  - le pôle $x = 1$ de multiplicité 2 donne deux éléments simples : $\dfrac{A_1}{x-1}\ ,\ \dfrac{A_2}{(x-1)^2}\ ,$
  - pôle $x = -2$ de multiplicité 1 donne un élément simple : $\dfrac{A_3}{x+2}$.
- éléments simples de 2^e espèce : 1 seul, associé au facteur irreductible x^2+x+1 : $\dfrac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$.

2.2.3 Forme théorique

Théorème 2.8 *Soit $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ une fraction rationnelle irréductible. Alors :*

1. *si deg$(A) \geq$ deg(B), $F(X) = E(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$ avec $\deg R < \deg B$ et E la partie entière de F.*
2. *$\dfrac{R(X)}{B(X)}$ se décompose de manière unique comme somme de tous les éléments simples relatifs à B :*
   $$\frac{R(X)}{B(X)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(X - r_i)^k} + \sum_j \sum_\ell \frac{B_{jl}\,X + C_{jl}}{(X^2 + b_jX + c_j)^l}\ .$$

En énumérant :

$$F = E + \left[\frac{A_n}{(X-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(X-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1}{X-a}\right]$$
$$+ \cdots \text{ [de même pour les autres pôles réels]}$$
$$+ \left[\frac{B_mX + C_m}{(X^2+bX+c)^m} + \frac{B_{m-1}X + C_{m-1}}{(X^2+bX+c)^{m-1}} + \cdots + \frac{B_1X + C_1}{X^2+bX+c}\right]$$
$$+ \cdots \text{ [de même pour les autres pôles complexes]}$$

2.3 En pratique

1. On écrit F sous forme irréductible $\dfrac{A}{B}$
2. On détermine la partie entière E de F grâce à une division euclidienne de A par B, on est ramené à déterminer la DES de $\dfrac{R}{B}$
3. On factorise B, ce qui donne les pôles réels de F avec leur ordre de multiplicité.
4. On écrit la structure de la DES de F avec des coefficients indéterminés
5. On cherche à réduire le nombre de coefficients à trouver en utilisant si possible la parité de F : $F(-X) = F(X)$ ou $F(-X) = -F(X)$
6. Pour déterminer les coefficients des éléments de première espèce : on multiplie tout par $(X-a)^m$, m étant la multiplicité de a, et on remplace X par a (cela ne marche donc que pour le coefficient de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$).

   Symboliquement, on écrit : $A_m = \left[\dfrac{R(X)}{B(X)}(X-a)^m\right]_{X=a}$
7. Pour déterminer les coefficients de chaque partie polaire des éléments de seconde espèce : on multiplie tout par $(X^2+bX+c)^m$, m étant la multiplicité des racines complexes conjuguées u et $\overline{u}$ du trinôme, et on remplace X par u.
8. S'il reste des coefficients à déterminer, on peut toujours remplacer X par des valeurs différentes des pôles et obtenir un système d'équations qui permettra d'obtenir les coefficients manquants. Ou alors tout multiplier par X puis faire tendre X vers $+\infty$.

2.4 Exemples

Exemple 2.9 (Un exemple simple concret)Décomposer en éléments simples :

$$F(X) = \frac{X^2+X}{X^3(X-2)}$$

1. F sous forme irréductible : $F = \dfrac{X+1}{X^2(X-2)}$
2. Sa partie entière est nulle puisque $deg(X+1) < deg(X^2(X-2))$
3. B est déjà factorisé : les pôles sont 0 (d'ordre 2) et 2 (d'ordre 1). Pas d'éléments simples de seconde espèce.
4. Structure de la DES de F : $F = \dfrac{A_1}{X^2} + \dfrac{A_2}{X} + \dfrac{B}{X-2}$
5. Pas de parité
6. $A_1 = \left[X^2 F\right]_{X=0} = -\dfrac{1}{2}$ et $B = [(X-2)F]_{X=2} = \dfrac{3}{4}$
7. Pas d'éléments de seconde espèce
8. Pour trouver A_2 : on multiplie tout par X et on fait tendre X vers $+\infty$: $0 = 0 + A_2 + B$ donc $A_2 = -\dfrac{3}{4}$

Conclusion : $F = \dfrac{-\frac{1}{2}}{X^2} + \dfrac{-\frac{3}{4}}{X} + \dfrac{\frac{3}{4}}{X-2}$

Exemple 2.10 Décomposer en éléments simples :

$$F = \frac{3}{(X-1)^2(X^2+X+1)}$$

Structure de la DES de F : $F = \dfrac{A}{(X-1)^2} + \dfrac{B}{X-1} + \dfrac{CX+D}{X^2+X+1}$

$A = \left[(X-1)^2 F\right]_{X=1} = 1$

On multiplie tout par X et on fait tendre X vers $+\infty$: $0 = 0 + B + C$ donc $B + C = 0$

Pour $X = 0$: $3 = 1 - B + D$ donc $D - B = 2$

Pour $X = 2$: $\dfrac{3}{7} = 1 + B + \dfrac{2C+D}{7}$ donc $7B + 2C + D = -4$

En résolvant, on obtient $B = -1, C = 1, D = 1$ d'où :

$$F = \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{X+1}{X^2+X+1}$$

Exemple 2.11 *(Un exemple difficile exprès pour rencontrer les différents cas possibles)*

Donner la décomposition en éléments simples de

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2\,x^6 + 3\,x^5 - 3\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 - 18\,x - 5}{x^5 + x^4 - 2\,x^3 - x^2 - x + 2}$$

1. F est irréductible
2. Division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 2\,x^6+3\,x^5-3\,x^4-3\,x^3-3\,x^2-18\,x-5 & x^5+x^4-2\,x^3-x^2-x+2 \\ \cline{2-2} \underline{2\,x^6+2\,x^5-4\,x^4-2\,x^3-2\,x^2\ +\ 4\,x} & 2x+1 \\ x^5\ +\ x^4\ -\ x^3\ -\ x^2-22\,x-5 & \\ \underline{x^5\ +\ x^4-2\,x^3\ -\ x^2\ \ -\ \ x+2} & \\ x^3\qquad -21\,x-7 & \end{array}$$

On a donc $E=2x+1$ et $F(x)=2x+1+\dfrac{x^3-21\,x-7}{x^5+x^4-2\,x^3-x^2-x+2}$.

On est ramené à trouver la DES de $G(x)=\dfrac{x^3-21\,x-7}{x^5+x^4-2\,x^3-x^2-x+2}$

3. B a été factorisé précédemment en $B(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$ dans l'exemple 1.12
4. donc la structure de la DES de G est :

$$G(x)=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\ (\star)$$

5. Pas de parité particulière
6. Calcul des coefficients de multiplicité la plus élevée :

• calcul de A_3 : En multipliant $(\star)$ par $(x+2)$, on a
$\dfrac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=(x+2)\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}+A_3+(x+2)\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$
et en posant $x=-2$, $\dfrac{-8+21{\cdot}2-7}{9{\cdot}3}=A_3 \iff A_3=1$.

• calcul de A_2 : on multiplie $(\star)$ par $(x-1)^2$ et on remplace x par 1. On obtient $A_2=-3$.

7. pour calculer B et C il faudrait ensuite multiplier par x^2+x+1 et remplacer par une racine complexe de x^2+x+1 ; ici ces racines sont trop compliquées donc on va directement remplacer par des valeurs particulières de x, différentes des pôles.
8. $\dfrac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{-3}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

• pour $x=0$: on obtient $\dfrac{-7}{2}=\dfrac{A_1}{-1}-3+\dfrac{1}{2}+C$

• pour $x=-1$: on obtient $\dfrac{13}{4}=\dfrac{A_1}{-2}-\dfrac{3}{4}+1-B+C$

• on pourrait remplacer x par -2, on va utiliser l'autre technique qui consiste à multiplier tout par la puissance de x la plus basse (ici x) puis de faire tendre x vers $+\infty$. On obtient ainsi :

$$\frac{x(x^3-21x-7)}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{A_1x}{x-1}+\frac{-3x}{(x-1)^2}+\frac{x}{x+2}+\frac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1}$$

et lorsque x tend vers l'infini on a : $0=A_1-0+1+B$

Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} -A_1+C & =-1 \\ -\frac{1}{2}A_1-B+C & = 3 \\ A_1+B & =-1 \end{cases} \quad \text{dont les solutions sont} \quad \begin{cases} A_1 = 2 \\ B = -3 \\ C = 1 \end{cases}$$

Finalement, la DES de la fraction rationnelle F initiale est :

$$F(x)=2x+1+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{-3x+1}{x^2+x+1}$$

3 Exercices

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F_1(X)=\dfrac{X^2}{(X-1)(X+2)(X+3)}$
2. $F_2(X)=\dfrac{X^4+X+1}{X^3-3X^2+2X}$
3. $F_3(X)=\dfrac{1}{(X^2+1)^2-X^2}$
4. $F_4(X)=\dfrac{X^6-X^5+X^2-X}{(X^2-X)(X^2-1)^2}$

5. $F_5(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X^3+1)}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$
7. $F_7(X) = \dfrac{6X^5-3}{(X-1)(X^3-1)}$
8. $F_8(X) = \dfrac{X-1}{(X^2-1)X(X+1)^2}$

Solutions :

1. $F_1(X) = \dfrac{1/12}{X-1} - \dfrac{4/3}{X+2} + \dfrac{9/4}{X+3}$
2. $F_2(X) = X+3+\dfrac{1}{2X} - \dfrac{3}{X-1} + \dfrac{19/2}{X-2}$
3. $F_3(X) = \dfrac{X+1}{2(X^2+X+1)} - \dfrac{X-1}{2(X^2-X+1)}$
4. $F_4(X) = 1+\dfrac{1/2}{(X-1)^2} + \dfrac{1/2}{X-1} + \dfrac{1/2}{(X+1)^2} - \dfrac{1/2}{X+1}$
5. $F_5(X) = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1/3}{X+1} + \dfrac{1-2X}{3(X^2-X+1)}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1/8}{X-1} - \dfrac{1/8}{X+1} - \dfrac{1/2}{(X^2+1)^2} - \dfrac{1/4}{X^2+1}$
7. $F_7(X) = 6X+6+\dfrac{-3X-1}{X^2+X+1} + \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{9}{X-1}$
8. $F_8(X) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{(X+1)^3} - \dfrac{1}{(X+1)^2} - \dfrac{1}{X+1}$