Dérivation

Table des matières

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1 Fontion dérivable en un point

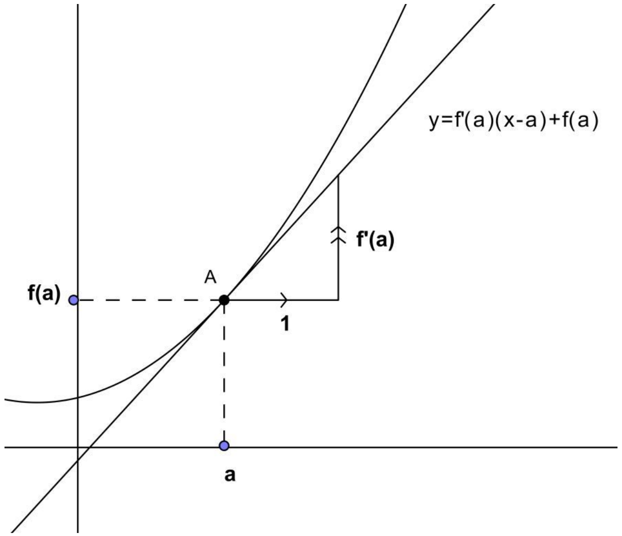
Définition 1.1 *f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si la limite du taux d'accroissement en a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note dans ce cas*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

$f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a.

Propriété 1.2 *$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.*

Cette tangente a donc pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Remarque *1. Une courbe représentative peut avoir une tangente verticale en un point et ne pas être dérivable, car une tangente verticale ne possède pas de coefficient directeur (équation $x = b$ où b est réel). Dans ce cas, on obtient une limite du taux d'accroissement infinie.*

2. *Si les limites à gauche et à droite de* $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existent, il faut qu'elles soient identiques pour pouvoir dire que* f *est dérivable en* a*. Sinon,* f *est dite dérivable à droite ou à gauche et sa courbe possède une ou deux demi-tangentes.*

Définition 1.3 *Une fonction dérivable en tout point de l'intervalle* I *est dite* ***dérivable*** *sur* I*, la fonction* $x \mapsto f'(x)$ *définie sur* I *est appelée* ***fonction dérivée*** *de* f *et notée* f'*.*

2 Ecriture différentielle

En posant $\Delta x = (x+h) - x = h$ et $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ et en utilisant $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx f'(x)$ lorsque h est très petit, on obtient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$.

On écrit symboliquement $dy = f'(x)dx$ noté aussi $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$, cela exprime que l'on dérive la fonction f par rapport à la variable x.

3 Dérivées des fonctions usuelles

n est un entier naturel non nul.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

4 Opérations sur les dérivées

k est une constante réelle, u et v sont deux fonctions dérivables possédant les conditions requises pour pouvoir effectuer les opérations décrites dans le tableau ci-dessous.

Opération	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Exercice 1 Calculer, sans se préoccuper des ensembles où elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $g(x) = x^4 - 3x^3 - 8x + 2$
2. $h(x) = (x+2)(e^x + 1)$
3. $i(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+1}$
4. $k(x) = \dfrac{2}{\ln(x)}$
5. $m(x) = x\ln(x) - x$

Réponses :

$g'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 8$; $h'(x) = e^x(x+3) + 1$; $i'(x) = \dfrac{-x^2+2x+5}{(x^2+4x+1)^2}$; $k'(x) = -\dfrac{2}{x\ln^2(x)}$; $m'(x) = \ln(x)$

Exercice 2 Calculer, sans se préoccuper des ensembles où elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (3-2x)^3$
2. $g(x) = \ln(x^2+1)$
3. $h(x) = (x+3)e^{-x}$
4. $k(x) = \cos(4x + \dfrac{\pi}{3})$
5. $m(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Réponses :

$f'(x) = -6(3-2x)^2$; $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $h'(x) = (-x-2)e^{-x}$;

$k'(x) = -4\sin(4x + \dfrac{\pi}{3})$; $m'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

5 Dérivées des composées de fonctions

u est une fonction dérivable possédant les conditions requises pour pouvoir dériver les composées de fonctions du tableau ci-dessous. Pour établir toutes les formules de ce tableau, on utilise : $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$.

Fonction composée	Dérivée
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

6 Application de la dérivation

6.1 Etude du sens de variation des fonctions

Théorème 6.1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *si pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement positif (ou nul en quelques points isolés), alors la fonction f est strictement croissante sur I*
- *si pour tout x de I, $f'(x)$ est strictement négatif (ou nul en quelques points isolés), alors la fonction f est strictement décroissante sur I*
- *si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I*

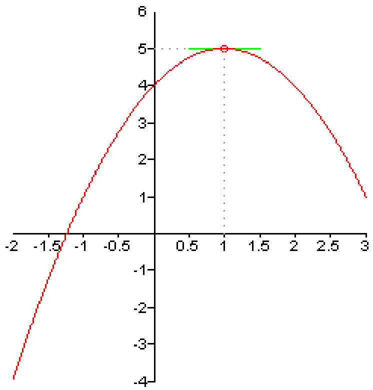
Exercice 3 Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = (2x+3)^3$ sur l'intervalle $[-2; 2]$ et dresser son tableau de variations.

6.2 Extrema d'une fonction

Théorème 6.2 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$ et $x_0 \in I$. Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un maximum ou un minimum en x_0.*

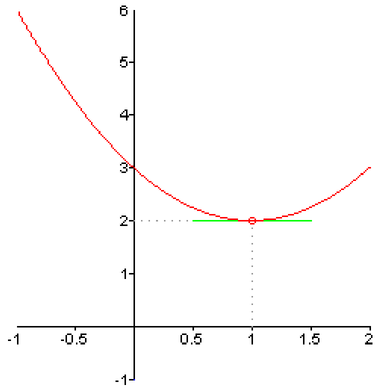
Obtention d'un maximum :

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$



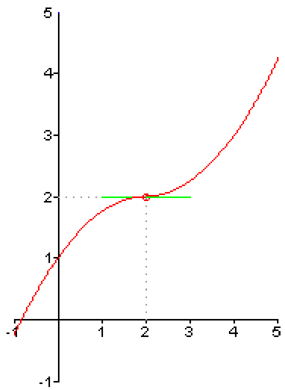
Obtention d'un minimum :

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$



La dérivée s'annule mais ne change pas de signe : exemple :

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$



7 Différentielle et calcul d'erreur

7.1 Explication

Le calcul d'incertitude, ou d'erreur, permet d'évaluer correctement les erreurs qui se produisent lors de mesures liées à la vérification d'une relation qui lie différentes grandeurs physiques. Les instruments de mesure n'étant pas d'une précision absolue, les mesures faites pendant une expérience ne sont pas exactes. Il faut donc évaluer ces incertitudes pour répondre à la question : "la relation n'est pas vérifiée exactement parce qu'elle est fausse ou parce que les mesures sont incertaines ?" On en déduit des marges d'erreurs, en dehors desquelles la relation sera invalidée.

Lorsqu'on mesure une grandeur physique g il existe donc une incertitude de mesure $\Delta g > 0$ de telle sorte que la valeur vraie se situe dans un intervalle de confiance $[g - \Delta g; g + \Delta g]$. On note le résultat de la mesure sous la forme : $g \pm \Delta g$.

7.2 Exemple : circonférence d'un cercle

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r. Quelle est l'incertitude Δp sur la circonférence du cercle, en fonction de ΔR celle sur le rayon ?

Le périmètre d'un cercle s'écrit $p = 2\pi r$. On obtient donc $\Delta p = 2\pi \Delta r$: la variation du périmètre est indépendante de la taille initiale du cercle. Deux cercles de taille différente ayant la même incertitude de mesure sur leur rayon, auront aussi la même incertitude de mesure sur leur périmètre.

Application numérique : si r a été mesuré à 6 cm, avec $\pm 0,1$ cm, on a $r = 6 \pm 0,1$ donc $p + \Delta p = 2\pi(r + \Delta r)$ et le périmètre sera donc d'environ $37,7 \pm 0,63$ cm.

7.3 Méthodes de base

Soient x et y les grandeurs mesurées, Δx et Δy leurs incertitudes absolues, et $\frac{\Delta x}{x}$ et $\frac{\Delta y}{y}$ leurs incertitudes relatives.

Supposons qu'une grandeur F soit, dans une loi physique, fonction de deux grandeurs x et y que l'on mesure avec des incertitudes Δx et Δy. On cherche une estimation de l'incertitude sur la grandeur F. Avec l'écriture différentielle de F on a :

$$dF(x,y) = (\frac{\partial F}{\partial x})dx + (\frac{\partial F}{\partial y})dy$$

où $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ désignent les dérivées partielles de F par rapport à x et y.

Donc on obtient

$$\delta F \simeq (\frac{\partial F}{\partial x})\delta x + (\frac{\partial F}{\partial y})\delta y$$

lorsque x varie de δx et y de δy.

On ne connait cependant pas le signe des erreurs par rapport à la valeur exacte (est-elle augmentée ou diminuée du fait de l'erreur ?), de telle sorte qu'on doive majorer "grossièrement" par des valeurs toutes positives et que la variation de F est **au maximum** égale à

$$\Delta F \leq |\frac{\partial F}{\partial x}|\Delta x + |\frac{\partial F}{\partial y}|\Delta y$$

Le terme de droite constitue une estimation (surestimée) de l'incertitude de F.

Appliquons cette formule aux différentes opérations possibles :

7.3.1 Incertitude sur une somme ou une différence

Propriété 7.1

- *Si* $F = x + y$ *alors* $\Delta F = \Delta x + \Delta y$.
- *Si* $F = x - y$ *alors* $\Delta F = \Delta x + \Delta y$.

Dans le cas d'une somme ou d'une différence les variations absolues s'ajoutent (pas de $-$ pour la formule de $x - y$ car l'estimation maximale de l'erreur est obtenue lorsque les variations s'ajoutent).

7.3.2 Incertitude sur un produit ou un rapport

Propriété 7.2

- *Si* $F = x \times y$ *alors* $\Delta F = \Delta x.y + \Delta y.x$ *donc* $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$

  Remarque *Remarquer l'analogie avec la formule dérivée* $f' = u'v + uv'$.

- *Si* $F = \frac{x}{y}$ *alors* $\Delta F = \frac{\Delta x.y + \Delta y.x}{y^2}$ *donc* $\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$

Dans le cas d'un produit ou d'un rapport les variations relatives s'ajoutent.

7.4 Exemples

7.4.1 Surface d'un rectangle

La surface d'un rectangle s'obtient par $S = L \times l$ où l et L désignent le largeur et la longueur du rectangle. On a donc une incertitude sur S égale à :

$$\Delta S = \Delta L.l + \Delta l.L$$

Or en faisant le calcul exact, la variation de surface peut s'écrire

$$dS = (l + dl).(L + dL) - S = l.L + l.dL + L.dl + dl.dL - l.L$$

$dl \times dL$ étant négligeable, on obtient bien $dS \simeq dl.L + dL.l$

Remarque *Pour cet exemple il est intéressant de considérer la différentielle logarithmique :* $\ln S = \ln l + \ln L$ *donc en utilisant* $d(\ln f) = \frac{df}{f}$*, on obtient directement :*

$$\frac{dS}{S} = \frac{dl}{l} + \frac{dL}{L}$$

Cette méthode se généralise aux grandeurs quotient ou produit de plusieurs variables.

7.4.2 Incertitudes sur les volumes et les surfaces

Toutes les solutions de ces exercices sont données à la fin du polycopié.

Exercice 4 On mesure la longueur, la largeur et la hauteur de la salle de maths et on obtient les valeurs suivantes :

longueur $10,2 \pm 0,1$ m

largeur $7,70 \pm 0,08$ m

hauteur $3,17 \pm 0,04$ m

Calculer et donner les résultats avec leurs incertitudes absolues pour :

1. le périmètre
2. la surface du sol

3. le volume de la salle.

Exercice 5 Exprimer l'incertitude absolue puis relative de l'aire d'un disque en fonction de celle de son rayon.

Application numérique : $R = 5,21 \pm 0,1$ cm. Quelle est la précision du résultat obtenu ?

Exercice 6 Le volume d'une sphère se calcule avec la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Exprimer l'incertitude relative du volume en fonction de celle du rayon.

7.4.3 Autres exemples

Exercice 7 Un condensateur électrique de capacité $C = (120 \pm 5).10^{-12}$ F est alimenté sous une tension $U = 12,0 \pm 0,1$ V. Expliquer pourquoi la charge électrique stockée par ce condensateur est de $Q = (144 \pm 7).10^{-11}$ C.

Par définition d'un condensateur la charge électrique stockée vaut $Q = CU$.

Exercice 8 Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux, on mesure le diamètre intérieur D_1 et le diamètre extérieur D_2 et on trouve $D_1 = 19,5 \pm 0,1$ mm et $D_2 = 26,7 \pm 0,1$ mm. Donnez le résultat de la mesure et sa précision.

Exercice 9 La loi des gaz parfaits $P = \dfrac{n \times R \times T}{V}$ relie :

P : la pression du gaz

V : le volume occupé par le gaz

n : la quantité de gaz en moles (1 mole = $6,022.10^{23}$ molécules)

R : la constante des gaz parfaits = $8,314$ J.K^{-1}.mol^{-1}

T : la température absolue du gaz, en kelvin.

1. Donner l'erreur absolue puis relative sur P déduite des erreurs sur n, R, T et V, à partir du calcul différentiel, puis donner l'incertitude maximale obtenue.
2. Retrouver cette erreur en calculant la différentielle logarithmique.

Exercice 10 La période des petites oscillations d'un pendule simple de longueur $l = 100$ cm soumis à un champ de pesanteur uniforme $g = 9,807$ m.s^{-2} s'écrit $T = \sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Quelle est l'incertitude relative sur la période si la précision de g est de 1% ?

7.5 Solutions

Exercice 4

1. $35,80 \pm 0,36$ m
2. $78,54 \pm 1,59$ m^2
3. $248,97 \pm 8,17$ m^3

Exercice 5

$A = \pi R^2$ donc $\Delta A = 2\pi R \Delta R$ d'où : $\dfrac{\Delta A}{A} = 2\dfrac{\Delta R}{R}$.

$A = 85,28 \pm 3,27$ cm^2. Précision : $\dfrac{\Delta A}{A} = 3,9$ %

Exercice 6

$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ donc $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{4\pi R^2 \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\dfrac{\Delta R}{R}$

Exercice 7

$Q = CU = 144.10^{-11}$ C

$\Delta Q = \Delta C.U + \Delta U.C = 5.10^{-12} \times 12 + 0,1 \times 120.10^{-12} = 72 \times 10^{-12}$ C ;

Donc $Q = 144 \pm 7.10^{-11}$ C

Exercice 8

$3,6 \pm 0,1$ mm, précision $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{0,1}{3,6} = 2,78$ %.

Exercice 9

1. $dP = \dfrac{RT}{V}dn + \dfrac{nT}{V}dR + \dfrac{nR}{V}dT - \dfrac{dV}{V^2}nRT$ donc
   $\Delta P = \dfrac{RT}{V}\Delta n + \dfrac{nT}{V}\Delta R + \dfrac{nR}{V}\Delta T + \dfrac{\Delta V}{V^2}nRT$ et $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{\Delta n}{n} + \dfrac{\Delta R}{R} + \dfrac{\Delta T}{T} + \dfrac{\Delta V}{V}$
2. $\ln P = \ln n + \ln R + \ln T - \ln V$ donc en dérivant : $\dfrac{dP}{P} = \dfrac{dT}{T} + \dfrac{dR}{R} + \dfrac{dn}{n} - \dfrac{dV}{V}$ et on retrouve le résultat en passant aux incertitudes Δ.

Exercice 10

$\ln T = \ln 2\pi + \dfrac{1}{2}\ln l - \dfrac{1}{2}\ln g$ donc : $\dfrac{dT}{T} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{dl}{l} - \dfrac{dg}{g})$

Avec $\Delta l = 0$ et $\dfrac{\Delta g}{g} = 0,01$ on obtient $\dfrac{\Delta T}{T} = 0,005$ soit une précision de $0,5\%$.