Calcul intégral

Table des matières

1 Primitives

1.1 Définition

Définition 1.1 *On appelle primitive d'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f.*

On a donc : $F' = f$.

Propriété 1.2 *1. Toute fonction continue admet des primitives*

2. Les primitives d'une fonction f sont définies à une constante près : Si F est une primitive de f et k une constante arbitraire alors :

- *$F + k$ est une autre primitive de f*
- *inversement, une primitive quelconque de f s'écrira nécessairement $F + k$*

3. Il existe une unique primitive de f vérifiant $F(x_0) = y_0$ si x_0 et y_0 sont donnés.

Remarque Une primitive de f est aussi notée $\int f(x)dx$

Exercice 1 Donner toutes les primitives de $f(x) = 3x$ puis la primitive G qui vérifie $G(0) = 3$.

1.2 Primitives des fonctions usuelles

On utilise que $f + g$ a pour primitive $F + G$ et kf a pour primitive kF si k est une constante.

Chaque primitive est définie à une constante près.

On fera attention aux intervalles de validité des formules (non donnés ici).

Fonctions	Primitives
a	$ax + k$
$x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{mx}	$\dfrac{1}{m}e^{mx} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\ln x$	$x\ln x - x + k$

Exercice 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{2}{x} - 5x^4$

$g(x) = 3\sin(x) - \cos(x - \frac{\pi}{6})$

1.3 Primitives du type $u'f'(u)$

Toutes les primitives qui suivent proviennent de la formule

$$\int u'f(u(x))dx = F(u(x))$$

Fonctions	Primitives
$f(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}F(ax+b)+k$
$u'e^u$	e^u+k
$u'u^n$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+k$
$u'u$	$\dfrac{1}{2}u^2$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}+k$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$
$u'\cos u$	$\sin u+k$
$u'\sin u$	$-\cos u+k$

Exemple 1.3 Pour trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, on remarque que $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1)+k$ en utilisant la formule $\dfrac{u'}{u}$.

D'où $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+k$

Exercice 3 Déterminer une primitive de :

$f(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+4}$ $\qquad g(x) = e^{x+1}$

$u(x) = e^{\frac{4}{3}x}$ $\qquad v(x) = \dfrac{2}{(x-3)^2}$

$h(x) = \dfrac{2x+1}{4x^2+4x+1}$ $\qquad k(x) = x\cos(x^2+5)$

Solution

$F(x) = \ln(x^4+4)$ $\qquad G(x) = e^{x+1}$ $\qquad U(x) = \dfrac{3}{4}e^{\frac{4}{3}x}$

$V(x) = -\dfrac{2}{x-3}$ $\qquad H(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x^2+4x+1)$ $\qquad K(x) = \dfrac{1}{2}\sin(x^2+5)$

2 Intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, de primitive F. $a, b \in I$.

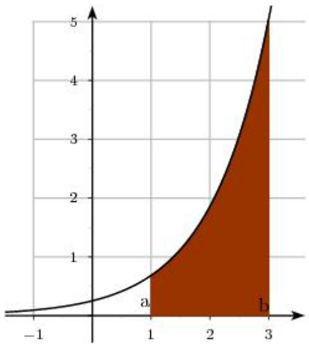
Définition 2.1 *On appelle intégrale de a à b de f le nombre $F(b) - F(a)$. On note*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Remarque Interprétation géométrique :

f étant une fonction à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = a$ et $x = b$, en unités d'aire.

Si f est à valeurs négatives on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}$.



3 Méthodes de calcul d'intégrales

3.1 Avec une primitive

Propriété 3.1 *F étant une primitive de f fonction continue sur $[a;b]$, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

.

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$.

Solution : $\dfrac{1}{2}(\ln 2)^2$

3.2 En utilisant une décomposition en éléments simples

Exemple 3.2 Pour calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx$, on utilise la décomposition en éléments simples $\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ et on obtient :

$$\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}dx = \int_2^3 \frac{2}{x-1}dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1}dx = \Big[2\ln(x-1)\Big]_2^3 - \Big[\ln(x+1)\Big]_2^3$$
$$= 2\ln 2 - 2\ln 1 - (\ln 4 - \ln 3) = \ln 3.$$

Exercice 5 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{25}{(x-2)^2(x+3)}dx$.

Solution : On obtient la DES $\dfrac{25}{(x-2)^2(x+3)} = \dfrac{5}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3}$. *D'où le résultat* $3\ln 2 - \ln 3 + \dfrac{5}{2}$.

3.3 Intégration par partie

Théorème 3.3 *Si u et v sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, alors*

$$\boxed{\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Remarque Quand on a un produit de fonctions, on doit choisir laquelle sera u' et laquelle sera v, en faisant en sorte que la nouvelle intégrale à calculer soit calculable, contrairement à l'intégrale initiale.

Exemple 3.4 Trouver une primitive de $x \mapsto xe^x$ par IPP :

On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$ donc $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$

$$\int xe^x dx = \big[xe^x\big] - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

Remarque Un choix contraire pour u' et v aurait amené au calcul de $\int \frac{1}{2}x^2 e^x$, intégrale non calculable directement.

Exercice 6 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi (x-1)\cos x dx$.

3.4 Changement de variable

Ce théorème permet de calculer $\int f$ si l'on sait calculer $\int f(\varphi)\varphi'$, ou réciproquement.

Théorème 3.5 *Si f est une fonction dérivable sur $[\alpha;\beta]$ et φ une fonction bijective (c'est à dire une fonction continue et strictement monotone) et dérivable sur $[a;b]$, ayant sa dérivée continue sur $[a;b]$ alors on a :*

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x)dx}$$

où $\alpha = \varphi(a)$ *et* $\beta = \varphi(b)$.

En pratique :
- on pose $x = \varphi(t)$
- on a donc $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ qu'on écrit symboliquement $dx = \varphi'(t)dt$
- on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$ et $\varphi'(t)dt$ par dx
- on change les bornes de l'intégration : si t varie entre a et b alors x varie entre $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$.

Exemple 3.6 Calcul de $I = \int_0^a e^{\sqrt{t}}dt$:
- on pose $x = \sqrt{t}$
- on a donc $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ qu'on peut écrire $dt = 2xdx$
- on remplace $e^{\sqrt{t}}$ par e^x et dt par $2xdx$
- on change les bornes de l'intégrale : si t varie entre 0 et a alors x varie entre $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{a}$.

On est ramené à $I = 2\int_0^{\sqrt{a}} xe^x dx$ qui peut être calculé comme précédemment par IPP. On obtient $2(\sqrt{a}-1)e^{\sqrt{a}} + 2$.

Exercice 7 Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+3}}$ en posant $u = \sqrt{2x+3}$.

Solution : $I = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}+1}\right)$

4 Exercices bilan

4.1 Enoncés

Exercice 8 Calculer $I = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x-1}dx$, soit directement, soit en posant $u = x^2+4x-1$.

Exercice 9 Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Exercice 10 Calculer $J = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2}dx$.

Exercice 11

1. Montrer que $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$ en posant $u = \sin t$. On appelle J cette intégrale.
2. Par IPP, montrer que $J = \frac{\pi}{2} - J$ et en déduire la valeur de J.

4.2 Solutions

Exercice 8 On vérifie que $u = x^2+4x-1$ est bien un changement de variable bijectif (fonction monotone entre 1 et 2)

$I = \frac{1}{2}(\ln 11 - \ln 4)$

Directement, on utilise la primitive de $\frac{u'}{u}$

Exercice 9 $I = [\frac{1}{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 10 Par DES, $J = \int_0^1 \frac{5}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+1}dx = -\frac{7}{3}\ln 2$.

Exercice 11 1. Si $u = \sin t$ alors t varie entre $\sin^{-1}(0) = 0$ et $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

2. Utiliser $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$. On obtient $J = \frac{\pi}{4}$.