PROPORTIONNALITE : correction de l'exercice 14, de l'exercice 1 de la fiche de TD Questions Complémentaires (pour les PE1B) et d'un exercice supplémentaire sur les vitesses (pour tous)

Correction de l'exercice 14 (Aix, 2003) :

1. Appelons c la capacité du bassin, et remplissons notre petit tableau…

	Capacité (l)	Temps (h)	Débit (l/h)
Fontaine 1	c	9	$c/9$
Fontaine 2	c	7	$c/7$
Fontaine 1+ Fontaine 2	c		$c/9 + c/7$

Le débit des deux fontaines réunies est la somme des débits de chacune des fontaines F1 et F2, soit $\frac{c}{9}+\frac{c}{7}$. On en déduit que le temps t de remplissage du bassin sera $t = \dfrac{c}{\frac{c}{9}+\frac{c}{7}}$, soit $t = \dfrac{c}{\frac{16c}{63}}$, d'où $t = c\times\dfrac{63}{16c}$, d'où $t = \dfrac{63}{16}$ h.

Or $\dfrac{63}{16} = 3{,}9375$, et $0{,}9375\times 60 = 56{,}25$, donc $t =$ 3h 56' 25''.

2. Idem, en utilisant les débits déjà calculés, et les données de cette question :

	Capacité (l)	Temps (h)	Débit (l/h)
Fontaine 1		4	$c/9$
Fontaine 2		3	$c/7$
Fontaine 1+ Fontaine 2	550		

La capacité c_1 remplie en 4 h par F1 est $\dfrac{4c}{9}$, celle c_2 remplie en 3 h par F2 est $\dfrac{3c}{7}$, donc la capacité totale remplie est $\dfrac{4c}{9}+\dfrac{3c}{7}$. On doit donc résoudre l'équation $\dfrac{4c}{9}+\dfrac{3c}{7} = 550$, équivalente à $\dfrac{55c}{63} = 550$, équivalente à $c = 550\times\dfrac{63}{55}$, ce qui donne $c = 630$ l. On en déduit alors que le débit D_1 de la première fontaine est $D_1 = \dfrac{630}{9} = 70$ l/h, et que le débit D_2 de la deuxième fontaine est $D_2 = \dfrac{630}{7} = 90$ l/h.

Correction de l'exercice1 (questions complémentaires)

1. La notion mathématique sous-jacente est la proportionnalité :
Dans le document 1, il s'agit de consommation moyenne : la consommation d'essence est proportionnelle à la distance parcourue.
Dans le document 2, il s'agit de vitesse moyenne : le temps du trajet est proportionnel à la distance parcourue.
2. La proportionnalité est enseignée en cycle 3, plus particulièrement en CM1 et CM2.
3. Document 1 :

Colonne	1	2	3	4	5	6	7
Distance parcourue (en km)	100	100/2=50	150	400	550	600	8x100=800
Consommation d'essence (en l)	7	3,5	7+3,5=10,5	4x7=28	5x7+3,5=38,5	6x7=42	56
Procédure		Linéarité x, col1 / 2	Linéarité +, col1 + col2	Linéarité x, colonne1 x 4	Linéarité x et +, col1 x 5 + col2	Linéarité x, col1 x 6	Linéarité x, colonne1 x 8

Document 2 :

Colonne	1	2	3	4
Durée du vol (en min)	15	30	10	60
Distance parcourue (en km)	180	2x180=360	360/3=120	4x180=720
Procédure		Linéarité x, col1 x 2	Linéarité x, col2 / 3	Linéarité x, colonne1 x 4

4. Soit y la consommation d'essence. On a le tableau de proportionnalité ci-contre, qui donne $y = 0{,}07x$: on remarque que $0{,}07$ est le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la ligne des distances à celle de la consommation. La fonction $x \mapsto 0{,}07x$ est une fonction linéaire.

Distance parcourue (en km)	100	x
Consommation d'essence (en l)	7	y

5. Quatre procédures peuvent être mises en œuvre : linéarité additive, multiplicative, passage à l'unité (ou coefficient multiplicateur), et enfin produit en croix (ou règle de trois).

6. D'après le cours sur les équations du mois de novembre, nous avons défini une situation-problème par :

a. elle peut être de deux types :
- confrontation des élèves à une conception erronée ;
- amélioration de procédures connues (expertise).

b. elle s'appuie sur un texte simple et une situation facilement compréhensible : les élèves doivent pouvoir entrer facilement dans le problème.

c. les critères de réussite doivent pouvoir être contrôlés par les élèves eux-mêmes (auto-évaluation), afin qu'ils puissent confronter leurs productions.

d. les connaissances qu'elle est censée faire acquérir sont les plus pertinentes pour les élèves à ce niveau (expertise).

On peut considérer que ces deux documents peuvent être présentés dans le but de confronter les élèves aux procédures de linéarité additive et multiplicative : les critères b, c et d sont alors vérifiés par les deux documents.
Qu'en est-il du critère a ? Tout dépend des élèves auxquels s'adressent ces documents :
Si ces procédures sont déjà bien connues (fin de CM2), aucun des deux documents ne constitue une situation-problème.
Si elles sont inconnues (début CM1), le document 2 constitue une situation-problème, qui conduit les élèves à traduire par exemple les deux premières colonnes par la phrase : « Si la durée du vol est doublée, alors la distance sera doublée », d'où la possibilité de mettre en évidence la propriété de linéarité multiplicative : dans un tableau de proportionnalité en ligne, on peut multiplier une colonne par un même nombre.
Si elles sont déjà connues, mais en cours d'acquisition, alors le document 2 est plutôt un exercice d'application (calculs simples, avec données placées en tableau, les données à calculer étant toutes sur la même ligne, coefficient multiplicateur 12 entier), donc ne constitue pas une situation-problème. Par contre, le document 1 utilise des procédures et des calculs (linéarité additive mélangée à linéarité multiplicative, données à calculer sur les deux lignes, coefficient multiplicateur $0{,}07$ décimal) plus élaborés que dans le document 2. Il peut donc constituer une situation-problème.

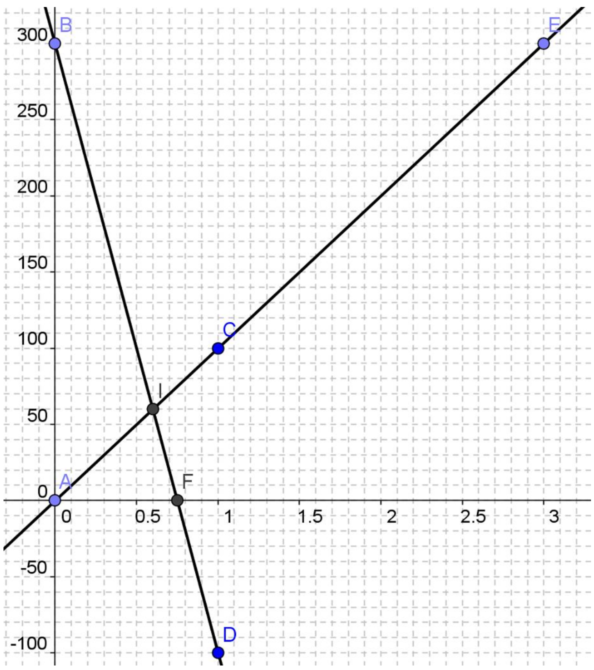
Exercice supplémentaire pour les courageux

Deux robots, Arthur et Boz, sont placés aux deux extrémités d'une piste rectiligne de 300 mètres de long qui relie un point A à un point B.
Arthur est placé au point A et Boz au point B. On les fait partir l'un vers l'autre à 9 heures précises.
Arthur se déplace à la vitesse constante de $6\ \mathrm{km/h}$ et Boz à la vitesse constante de $24\ \mathrm{km/h}$.

1. Exprimer ces deux vitesses en mètres par minute.
2. On veut déterminer le lieu et l'heure de rencontre des deux robots.

a. Représenter graphiquement le déplacement des deux robots. Par lecture graphique, estimer le lieu et l'heure de la rencontre.

b. Déterminer le lieu et l'heure de rencontre des deux robots par le calcul.



Correction :

1. $6\ \mathrm{km/k} = 6000\ \mathrm{m/h} = 100\ \mathrm{m/min}$ et $24\ \mathrm{km/h} = 400\ \mathrm{m/min}$.

2. a. On peut représenter graphiquement le problème en plaçant $[AB]$ (en m) en ordonnées, avec $A(0\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 300)$, et en plaçant le temps (en min) en abscisses : on lira sur le graphique les distances de gauche à droite pour Arthur, de droite à gauche pour Boz ; les points $C(1\ ;\ 100)$ et $D(1\ ;\ -100)$ traduisant les vitesses respectives d'Arthur et de Boz. Le trajet d'Arthur est représenté par la partie de la droite (AC) comprise entre les ordonnées 0 et 300 (segment $[AE]$) celui de Boz par la partie de la droite (BD) comprise entre les ordonnées 300 et 0 (segment $[BF]$).
Graphiquement, le lieu et l'heure du croisement se lit au point d'intersection I des deux trajets : on a $I(0{,}6\ ;\ 60)$, ce qui signifie que le croisement se produit au bout de $0{,}6\ \mathrm{min} = 24''$, à $60\ \mathrm{m}$ du point A (et donc à $240\ \mathrm{m}$ du point B).

b. Par le calcul, notons t le temps mis par les deux robots pour se rencontrer (c'est le même, puisqu'ils partent au même moment), et faisons notre petit tableau…

	Distance (m)	Temps (min)	Vitesse (m/min)
Arthur	$100t$	t	100
Boz	$400t$	t	400

Lorsqu'Arthur et Boz se rencontrent la somme des distances parcourues par l'un et l'autre est exactement égale à $AB = 300\ \mathrm{m}$.
Il faut donc résoudre l'équation $100t + 400t = 300$, équivalente à $500t = 300$, équivalente à $t = 0{,}6\ \mathrm{min}$. On retrouve les $24''$ de la première méthode. La distance parcourue par Arthur est $100\times0{,}6 = 60\ \mathrm{m}$, celle parcourue par Boz est $400\times0{,}6 = 240\ \mathrm{m}$: on retrouve les mêmes résultats qu'avec la résolution graphique.