EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'événement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire $p_1 = 1$.

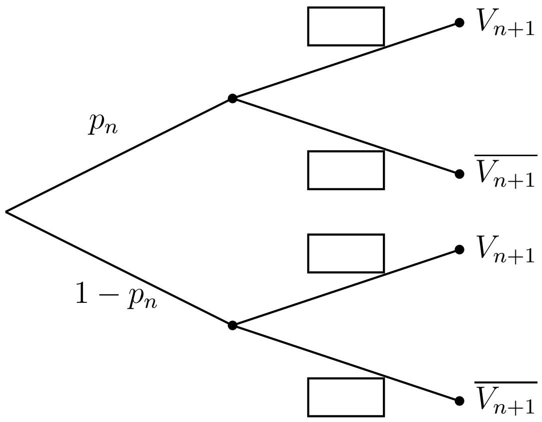
1. Calculer les probabilités des événements suivants :

a) A : « les 2-ième et 3-ième sondages sont positifs » ;

b) B : « les 2-ième et 3-ième sondages sont négatifs ».

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3-ième sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel n non nul, établir que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = p_n - 0,2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.