1ERE S **PRODUIT SCALAIRE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE**

A PRODUIT SCALAIRE

1) *définition*

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan

soit α l' angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, on appelle produit scalaire des deux vecteurs :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\alpha)$$

2) *propriétés*

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

soit k un nombre réel : $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}.\vec{v})$

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

$\vec{u}\perp\vec{v}$ ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

si $0 < \alpha < \frac{\Pi}{2}$ alors $\vec{u}.\vec{v} > 0$, si $\frac{\Pi}{2} < \alpha < \Pi$ alors $\vec{u}.\vec{v} < 0$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ $\qquad$ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

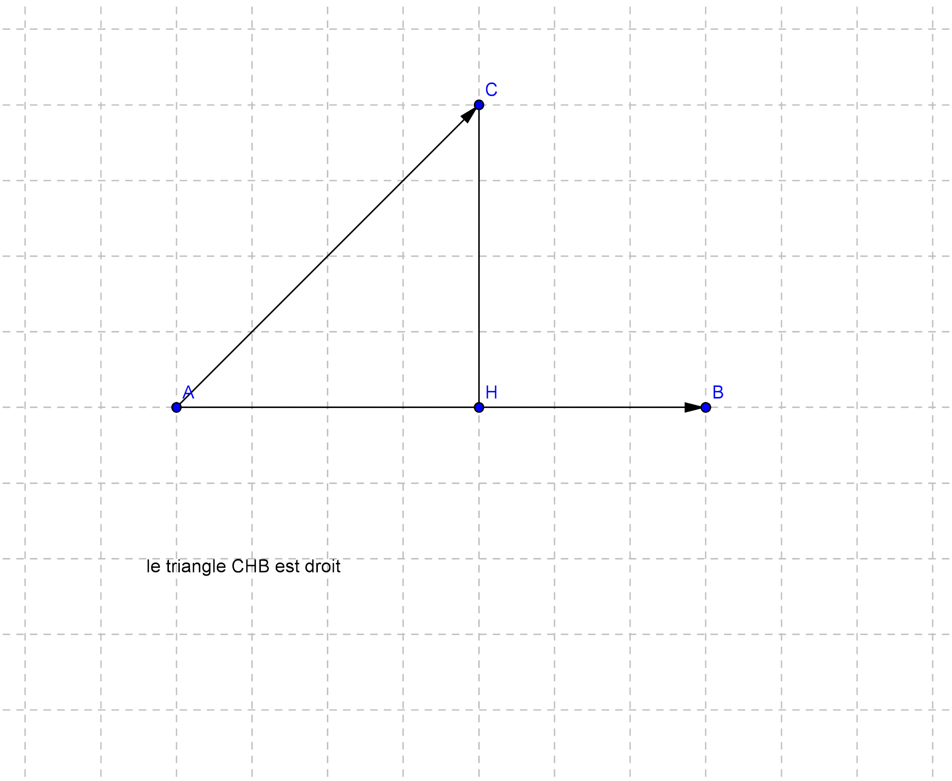
$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\times(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Soient A ,B et C trois points non alignés

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
(H est le point d' intersection de (AB) et de la perpendiculaire à la droite (AB) qui passe par H)

on a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

(voir ci-après)



si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire et de même sens alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire et de sens opposé alors : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

B GEOMETRIE ANALYTIQUE

rappels

Soient (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé

$\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A \; ; \; y_B - y_A$)

$AB^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

si $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x' , y') alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ssi xy' – x'y = 0

1) produit scalaire dans un repère orthonormé

Soient (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé

si $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x' , y') alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\vec{u} \perp \vec{v}$ ssi xx' + yy' = 0

2) équation de droites

soient a , b ,c trois réels tels que $(a , b) \neq (0 , 0)$

alors $ax + by + c = 0$ est l' équation d' un droite

de vecteur directeur $\vec{u}$ (- b , a) et de vecteur normal $\vec{n}$ (a , b)

3) équation de cercle

Soit Ω (a , b) un point du plan et R un réel strictement positif

alors l' équation du cercle de centre Ω et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

C RELATIONS METRIQUES

Formule d'Al'Kashi

> Soit ABC un triangle. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$.

Remarques

- si $\widehat{BAC}$ est un angle droit, $\cos(\widehat{BAC}) = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore.
- si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu, $\cos(\widehat{BAC}) > 0$ et $BC^2 < AB^2 + AC^2$.
- si $\widehat{BAC}$ est un angle obtus, $\cos(\widehat{BAC}) < 0$ et $BC^2 > AB^2 + AC^2$.

Théorème de la médiane

> Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC]. $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Aire et formule des sinus

Soit ABC un triangle.

L'aire de ABC est égale à $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \sin(\widehat{\mathrm{BAC}})$.

On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$, $c = \mathrm{AB}$, $\alpha = \widehat{\mathrm{BAC}}$, $\beta = \widehat{\mathrm{ABC}}$, $\gamma = \widehat{\mathrm{BCA}}$.

On a alors : $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

AUTRES FORMULES :

Si I est le milieu de [AB] alors pour tout point M du plan:

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$