

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∞  
15 novembre 2010

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$

- ★ si pour tout  $x \in [a ; b]$   $u(x) \geq 0$  alors  $\int_a^b u(x) dx \geq 0$
- ★  $\int_a^b [u(x) + v(x)] dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx$
- ★  $\int_a^b \alpha u(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx$  où  $\alpha$  est un nombre réel.

Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$  et si pour tout  $x$  de  $[a ; b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

PARTIE B :

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1.
  - a. Étudier le sens de variation de la fonction  $\varphi$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
  - b. Calculer  $\varphi(e)$ . Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[1 ; e]$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .
  - c. Déterminer le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

- a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout  $x \geq 1$  on a :  $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$ .
- b. Dédire de la question 1. le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .
- c. Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  on a :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3.
  - a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$ .

- b. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ , dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.  
Soit  $\mathcal{A}$  l'aire exprimée en  $\text{cm}^2$  du domaine compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .  
Déterminer un encadrement de  $\mathcal{A}$ .

**EXERCICE 2****5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_C = \sqrt{3} + i.$$

1.
  - a. Écrire  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  sous forme exponentielle.
  - b. En déduire le centre et le rayon du cercle  $\Gamma$  passant par les points A, B et C.
  - c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle  $\Gamma$  puis placer les points B et C.
2.
  - a. Écrire le quotient  $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
  - b. En déduire la nature du triangle ABC.
3. On note  $r$  la rotation de centre A et d'angle mesurant  $\frac{\pi}{3}$  radians.
  - a. Montrer que le point  $O'$ , image de O par  $r$ , a pour affixe  $-\sqrt{3} - i$ .
  - b. Démontrer que les points C et  $O'$  sont diamétralement opposés sur le cercle  $\Gamma$ .
  - c. Tracer l'image  $\Gamma'$  du cercle  $\Gamma$  par la rotation  $r$ .
  - d. Justifier que les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  se coupent en A et B.
4.
  - a. Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que

$$|z| = |z + \sqrt{3} + i|.$$

- b. Montrer que les points A et B appartiennent à  $(E)$ .

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la similitude indirecte  $f$  d'écriture complexe

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z}$$

où  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$ .

Soient les points A et B d'affixes respectives  $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$  et  $z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ .

On note  $A'$  et  $B'$  les images respectives des points A et B par  $f$ .

**Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.**

1.
  - a. Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
  - b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
  - c. En déduire la nature du triangle OA'B'.
  - d. Montrer que l'affixe  $z_{A'}$  de A' vérifie l'égalité :  $z_{A'} = 2z_A$ .  
En déduire la construction de A' et B'.
2. On note  $r$  la rotation de centre O et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{3}$ , et  $s$  la symétrie orthogonale d'axe  $(O; \vec{u})$ . On pose  $g = r \circ s$ .
  - a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation  $g$ .
  - b. Montrer que les points O et A sont invariants par  $g$ .
  - c. En déduire la nature de la transformation  $g$ .
3.
  - a. Montrer que l'on peut écrire  $f = h \circ g$ , où  $h$  est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
  - b. Sur la figure placée en ANNEXE, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation  $f$ .

**EXERCICE 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes**

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.  
On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
  - a. Vérifier que  $P(X = 0) = \frac{3}{10}$  puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
  - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ .
  - c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :  
A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :  
*si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.*
  - a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :  
B : « seule la première boule tirée est verte »,  
C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
  - b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace**

$\mathcal{P}$  est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal  $\vec{n}(1 ; -4 ; 1)$  ;

$\mathcal{D}$  est la droite passant par  $B(1; 4; 2)$  de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 1; 3)$ .

$\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $\Omega(1; 9; 0)$  passant par  $A$ .

1. Intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .
  - a. Démontrer que le plan  $\mathcal{P}$  a pour équation cartésienne :  $x - 4y + z - 1 = 0$ .
  - b. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .
2. Intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ .
  - a. Calculer la distance  $d$  du point  $\Omega$  au plan  $\mathcal{P}$ .
  - b. Calculer le rayon de la sphère  $\mathcal{S}$ . En déduire l'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ .
3. Intersection de la droite  $\mathcal{D}$  et de la sphère  $\mathcal{S}$ .
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$ .
  - b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$ .
  - c. En déduire que la droite  $\mathcal{D}$  coupe la sphère  $\mathcal{S}$  en deux points  $M$  et  $N$  distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

## ANNEXE

## EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie

