

# Conditionnement et indépendance

## A. Probabilités conditionnelles

---

### 1- Définition

Soit  $A$  un événement de l'univers  $\Omega$  muni de la loi  $P$  tel que  $P(A) \neq 0$ .

On définit sur  $\Omega$  une nouvelle loi de probabilité notée  $P_A$  en posant pour tout événement  $B$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

$P_A$  est appelée probabilité conditionnelle sachant que  $A$  est réalisé. On note encore

$$P_A(B) = P(B|A), \text{ probabilité de } B \text{ sachant } A.$$

### Remarque

Comme  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ , on a aussi  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ .

La réalisation de  $A \cap B$  s'obtient en réalisant  $A$ , puis  $B$  sachant que  $A$  est réalisé.

### Exemple

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Considérons les événements  $A$  : « la première boule est rouge » et  $B$  : « la deuxième boule est rouge ».

Tirer deux boules rouges correspond à l'évènement  $A \cap B$ .

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ . Or  $P(A) = \frac{5}{8}$  (5 boules rouges parmi 8) et  $P_A(B) = \frac{4}{7}$  (après le tirage de la première boule rouge il reste 4 boules rouges parmi 7).

$$\text{Ainsi } P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

### 2- Formule des probabilités totales

On considère des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  formant une partition de l'univers  $\Omega$  (leur réunion donne  $\Omega$  et ils sont deux à deux disjoints et non vide).

Alors pour tout événement  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B),$$

avec pour tout  $i$  pris entre 1 et  $n$ ,  $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$ .

$$\text{on donc } P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

### Exemple

Une urne  $U_1$  contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne  $U_2$  contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne  $U_3$  contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Appelons  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  les évènements correspondant au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a  $P(U_1)=P(U_2)=P(U_3)=\frac{1}{3}$ .

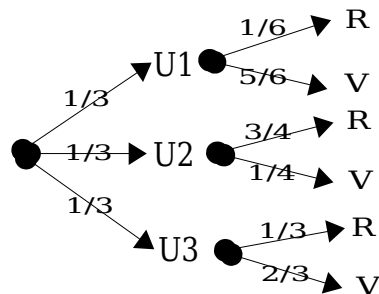
Soit  $B$  l'évènement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne  $P(B)=P(U_1 \cap B)+P(U_2 \cap B)+P(U_3 \cap B)$ ,

donc  $P(B)=P(U_1) \times P_{U_1}(B)+P(U_2) \times P_{U_2}(B)+P(U_3) \times P_{U_3}(B)$ .

Or  $P_{U_1}(B)=\frac{1}{6}$ ,  $P_{U_2}(B)=\frac{3}{4}$  et  $P_{U_3}(B)=\frac{1}{3}$ .

On a donc  $P(B)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ .

On peut retrouver ce résultat en utilisant un arbre de probabilité.



On applique les règles suivantes :

- On a une probabilité sur la première branche, puis des probabilités conditionnelles sur les branches suivantes.
- Tous les chemins partant d'un évènement forment une partition de cet évènement.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet évènement.

Ainsi une simple lecture de l'arbre nous donne le résultat  $P(B)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ .

## B. Indépendance

### 1- Evènements indépendants

On dit que deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants lorsque  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Cela revient à dire que si  $P(A) \neq 0$ ,  $P_A(B) = P(B)$ .

(il est naturel de dire que  $A$  et  $B$  sont indépendants si la probabilité de  $B$  est la même que la probabilité de  $B$  sachant  $A$ )

#### Exemple

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bi-moteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Soient  $A$  l'évènement « le premier moteur tombe en panne » et  $B$  l'évènement « le second moteur tombe en panne ». Alors  $A \cap B$  est l'évènement « les deux moteurs tombent en panne ».

On a  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 10^{-8}$ . L'évènement contraire,  $\overline{A \cap B}$ , signifie qu'au moins l'un des moteurs n'est pas tombé en panne, donc que l'avion arrive à bon port. On a

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - 10^{-8}.$$

## 2- Propriété

Si deux évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors les évènements  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants aussi, de même que  $\bar{A}$  et  $B$ , ainsi que  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

## 3- Répétition d'expériences indépendantes

On considère une expérience aléatoire qui donne lieu à un événement  $A$  avec la probabilité  $p$ . La répétition de cette expérience  $n$  fois dans des conditions similaires produit des évènements indépendants; la probabilité que l'évènement  $A$  se produise exactement  $n$  fois est donc égale à  $p^n$ .

### Exemple

On lance un dé non pipé 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 ? L'évènement  $A$  « obtenir au moins une fois un 6 » est le contraire de l'évènement  $B$  « n'obtenir aucun 6 » qui consiste à obtenir un résultat différent de 6 quatre fois de suite. Comme la probabilité d'obtenir un résultat différent de 6 lors d'un lancer est  $5/6$ , on a :

$$P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \text{ et donc } P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,52 .$$