

LOGARITHME – EXERCICES 1 / 2

Etude de fonctions

1. Etudier les fonctions suivantes :

1.1. $f(x) = -3x + 4 + 5 \ln(x)$

1.2. $f(x) = 2x^2 - 5x - \ln(x)$

1.3. $f(x) = -\ln(-2x + 5) - x^2 - 3x + 1$

1.4. $f(x) = \ln(-2x^2 - 4x + 6)$

Primitives

$f(x)$	$F(x)$	Validité
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$D = \{x \in D_u / u(x) \neq 0\}$

2. Trouver une primitive des fonctions suivantes :

2.1. **METHODE** $f(x) = \frac{-5}{2x-4}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2.2. $f(x) = \frac{3}{-4x-4}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2.3. $f(x) = \frac{x}{-x^2+4}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

2.4. **METHODE** $f(x) = \frac{6x-5}{(2x-5)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$

2.4.1. Trouver les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{(2x-5)} + \frac{b}{(2x-5)^2}$$

2.4.2. Déterminer une primitive de f

2.5. $f(x) = \frac{15x+1}{(3x+6)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2.5.1. Trouver les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{(3x+6)} + \frac{b}{(3x+6)^2}$$

2.5.2. Déterminer une primitive de f

Limites et Asymptotes

Théorème : Les résultats qui suivent permettent de lever l'indétermination :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- (2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$
- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- (4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

3. Etudier les limites suivantes :

3.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-5}{-x^2+4x} - \frac{2}{\ln(x)}$

3.2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3x^2-5}{-x^2+4x} - \frac{2}{\ln(x)}$

3.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5 \ln(-2x^3 + x - 1)$

3.4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-3x-2)^2 + 5x \ln x$

3.5. **DM** $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 1 - \frac{\ln x}{x-2}$

3.5.1. Montrer que la courbe de la fonction admet une asymptote oblique d

3.5.2. Déterminer la position de la courbe par rapport à d.

3.6. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \ln(x) - \ln(x+1)}{x}$

Propriétés algébriques

- 1 • Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- 2 • Pour tous réels $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_p > 0$,
 $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_p)$
- 3 • Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- 4 • Pour tout réel $b > 0$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
- 5 • Pour tout réel $a > 0$ et tout entier p positif ou négatif,
 $\ln(a^p) = p \ln(a)$
- 6 • Pour tout réel $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

4. Vérifier les égalités suivantes

4.1. **METHODE**

$$\ln(x^5 + 2x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = \ln(x^2 + 2)$$

4.2. $\ln(x^3 - 5x^2) + \ln\left(\frac{1}{x-5}\right) = 2 \ln(x)$

4.3. $\ln(100) + 3 \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10)$

4.4. $\ln\left(\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{3}{2} \ln(x+1)$

LOGARITHME – EXERCICES 2 / 2

Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode pour résoudre une équation du type $a^n = b$ où n est l'inconnue (idem pour les inéquations) :

$$a^n = b \Leftrightarrow \ln(a^n) = \ln(b) \Leftrightarrow n \times \ln(a) = \ln(b) \\ \Leftrightarrow n = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

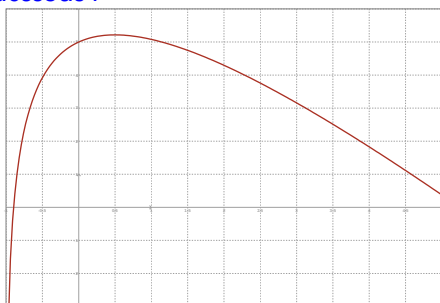
5. On place 1000 € sur un compte épargne au taux d'intérêts composés de 1,5% par mois. Au bout de combien de mois, sans effectuer de retrait, la capital aura-t-il doublé ?
6. **DM** Deux capitaux sont placés à intérêts composés. Le premier de 2000 € à 8% par mois et le second de 2200 € à 7% par mois. Au bout de combien de mois le premier capital dépassera-t-il le second ?

Problèmes de BAC

7. **BAC** Une fonction f est définie sur $]-1; 3[$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ avec a, b, c réels. On suppose que son tableau de variation est le suivant :

valeurs de x	-1	1	3
variations de $f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \ln(4) \searrow$	$-\infty$

- 7.1. En utilisant le tableau, déterminer a, b et c .
- 7.2. Calculer $f'(x)$
- 7.3. Vérifier que le sens de variation de la fonction obtenue est bien celui indiqué dans le tableau.
8. **BAC** **Partie A** : On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ où a et b désignent deux réels à déterminer. Sa courbe représentative C est tracée ci-dessous :



- 8.1. C passe par le point $A(0; 5)$ et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Déterminer a et b .

Partie B : On suppose désormais que la fonction f est définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1)$.

- 8.2. Calculer la limite de f en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.

- 8.3. En admettant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 8.4. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser le tableau de variation. Préciser la valeur exacte du maximum de f .

- 8.5. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

- 8.6. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de la solution positive β de l'équation $f(x) = 0$.

- 8.7. Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. Calculer $g'(x)$. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant pour $x=0$.

Partie C : Une imprimerie a une capacité de production de 5000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(p)$ (en milliers d'euros) où p désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers). On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

- 8.8. Calculer $F(5) - F(0)$ où F est une primitive de f .

- 8.9. En déduire le coût total en euros de fabrication de 5000 ouvrages.

- 8.10. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

$\left\{ \begin{array}{l} 5000 \text{ ouvrages le 1er jour puis } 3000 \\ \text{le 2° jour} \\ 4000 \text{ ouvrages pendant deux jours} \end{array} \right.$

Quelle est l'option la plus rentable ?