

Trigonométrie - Exercices à résoudre

1. Définitions – Formules fondamentales

1. A l'aide du cercle trigonométrique, rechercher une valeur approchée des nombres suivants :

$$\cos 120^\circ, \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{tg} 315^\circ, \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}, \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sin \frac{15\pi}{2}, \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{cotg}(-210^\circ)$$

Vérifier la pertinence de cette approximation à l'aide de la calculatrice

2. Construire tous les angles α tels que : $\operatorname{tg} \alpha = 2$; $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{cotg} \alpha = 0,75$; $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

3. On donne $\sin a = \frac{5}{13}$ et a dans le deuxième quadrant. Calculer $\cos a$, $\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{cotg} a$.

4. On donne $\operatorname{tg} a = -\frac{3}{4}$ et $a \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. On demande $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{cotg} a$.

5. On donne $\cos a = -\frac{1}{8}$ et a dans le deuxième quadrant. Calculer $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$.

6. On donne $\operatorname{cotg} a = 4$ et $a \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. Calculer $\operatorname{tg} a$, $\sin a$, $\cos a$.

7. Calculer $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$ sachant que $\sin a = \frac{12}{13}$ et que a est du deuxième quadrant.

8. Calculer $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{cotg} a$ sachant que $\cos a = -0,28$ et que a est du troisième quadrant.

9. Calculer $\sin a$, $\cos a$ et $\operatorname{tg} a$ sachant que $\operatorname{cotg} a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et que a est du troisième quadrant.

10. Un rayon lumineux passe de l'air dans l'eau. On sait qu'entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r existe la relation $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3}$ ($\frac{4}{3}$ étant l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air).

Construire le rayon réfracté connaissant le rayon incident.

11. Simplifier les expressions suivantes :

11.1. $\left(\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{cotg} a}\right) \sin a \cos a$

11.2. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b - \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a \cos^2 b}$

11.3. $\operatorname{cotg}^2 a - \operatorname{cotg}^2 b + \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b}$

11.4. $\sin^2 a (1 + \operatorname{cotg}^2 a)$

11.5. $\sin^6 a + 3 \sin^2 a \cos^2 a + \cos^6 a$

- 11.6. $\frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} + \frac{\sin^3 a - \cos^3 a}{\sin a - \cos a}$
- 11.7. $\sin^4 a + \sin^2 a \cos^2 a + 4 \sin^2 a + 5 \cos^2 a$
- 11.8. $\sin^8 a - 2(1 - \sin^2 a \cos^2 a)^2 + \cos^8 a$
- 11.9. $\sin^6 a - 2 \sin^4 a + \cos^6 a + \sin^2 a - \cos^4 a$
12. Démontrer que les expressions suivantes sont indépendantes de a .
- 12.1. $(\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a) \sin a \cos a$
- 12.2. $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a - \frac{1}{\sin a \cos a}$
- 12.3. $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2$
- 12.4. $\sin^4 a + 2 \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a$
- 12.5. $\sin^6 a + 3 \sin^2 a \cos^2 a + \cos^6 a$
- 12.6. $3(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2(\sin^6 a + \cos^6 a)$
13. On donne $x = a \cos \alpha - b \sin \alpha$, $y = a \sin \alpha + b \cos \alpha$.
- 13.1. Calculer $x^2 + y^2$
- 13.2. En déduire le lieu géométrique du point de coordonnées (x, y) quand on fait varier le paramètre α .
14. On donne $x = \frac{\cos u}{\cos v}$, $y = \frac{\sin u}{\cos v}$, $z = \operatorname{tg} v$. Calculer $x^2 + y^2 - z^2$.
- 15.
- 15.1. On considère les trois nombres $x = a \cos u$, $y = a \sin u \cos v$, $z = a \sin u \sin v$.
Montrer que $x^2 + y^2 + z^2$ est indépendant de u et de v .
- 15.2. On considère les quatre nombres $x = a \cos u$, $y = a \sin u \cos v$,
 $z = a \sin u \sin v \cos w$ et $t = a \sin u \sin v \sin w$.
Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ est indépendant de u, v, w .
- 15.3. Généraliser pour n nombres.
16. Si $0 < a < b < c < \frac{\pi}{2}$, prouver que $\operatorname{tg} a < \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} < \operatorname{tg} c$
17. On pose $\sin x + \cos x = a$ et $\sin^5 x + \cos^5 x = b$. Calculer $\sin^3 x + \cos^3 x$ et $\sin^5 x + \cos^5 x$ en fonction de a et de b .
18. Démontrer les identités suivantes.
- 18.1. $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a = 2 \sin^2 a - 1$
- 18.2. $\sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$
- 18.3. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^2 b}$

$$\begin{aligned}
18.4. \quad & \frac{1}{1 - \sin a} + \frac{1}{1 + \sin a} = \frac{2}{\cos^2 a} \\
18.5. \quad & \frac{\operatorname{tg} a - \sin a}{\sin^3 a} = \frac{1}{\cos a (1 + \cos a)} \\
18.6. \quad & \frac{\sin^2 b - \cos^2 a}{\sin^2 a \sin^2 b} = 1 - \cotg^2 a \cotg^2 b \\
18.7. \quad & \frac{\cos a}{1 - \operatorname{tg} a} + \frac{\sin a}{1 - \cotg a} = \sin a + \cos a \\
18.8. \quad & \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} a + \cotg b}{\cotg a + \operatorname{tg} b} \\
18.9. \quad & \frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{\operatorname{tg} a + 1}{\operatorname{tg} a - 1} = \frac{1 + \cotg a}{1 - \cotg a} = \frac{1 + 2 \sin a \cos a}{\sin^2 a - \cos^2 a} \\
18.10. \quad & \frac{\operatorname{tg} a + \cotg a}{\operatorname{tg} a - \cotg a} - \frac{\operatorname{tg} a - \cotg a}{\operatorname{tg} a + \cotg a} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 a - \cotg^2 a} = \frac{4 \sin^2 a \cos^2 a}{\sin^2 a - \cos^2 a} \\
18.11. \quad & \frac{\sin^2 a + \sin a \cos a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 a
\end{aligned}$$

19. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
19.1. \quad & \frac{\cotg 430^\circ}{\cos(-250^\circ)} + \frac{\sin 215^\circ \cos 145^\circ}{\operatorname{tg} 575^\circ \sin(-290^\circ)} \\
19.2. \quad & \frac{\sin 420^\circ \cos(-120^\circ) \operatorname{tg}^3(-1200^\circ) \cos 135^\circ}{\cotg^2(-870^\circ)} \\
19.3. \quad & 4 \sin^5 \frac{7\pi}{6} + 3 \cos^2 \frac{13\pi}{6} - \operatorname{tg}^3 \left(-\frac{31\pi}{6} \right) \\
19.4. \quad & \frac{\sin \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \frac{2\pi}{3} \cotg \frac{123\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{4}} \\
19.5. \quad & \frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{11\pi}{6} \right) \cotg^3 \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right)}{\sin \left(-\frac{32\pi}{3} \right) \cos^3 \left(-\frac{14\pi}{3} \right) \sin \left(-\frac{8\pi}{3} \right) \cos^3 \left(-\frac{17\pi}{6} \right)} \\
19.6. \quad & \sin \left(\frac{\pi}{2} + a \right) \cos (a - \pi) \cotg \left(\frac{3\pi}{2} - a \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2} - a \right) \cotg \left(a - \frac{3\pi}{2} \right) \\
19.7. \quad & \frac{\sin \left(a - \frac{13\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{11\pi}{2} + a \right)}{\cos(a - 11\pi) \cos(a - 7\pi)} \\
19.8. \quad & \frac{\sin(\pi - a) \cotg \left(\frac{3\pi}{2} - a \right) \cos(a - 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + a) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + a \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + a \right)} \\
19.9. \quad & \frac{\sin(a + 6\pi) \cos(2\pi - a)}{\operatorname{tg}(\pi - a) \cos^2(a + 4\pi)}
\end{aligned}$$

$$19.10. \quad \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{2} + a \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{2} - a \right)} \cos \left(a + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$19.11. \quad \frac{\sin \left(\pi - a \right) \operatorname{cotg} \left(\frac{3\pi}{2} - a \right) \cos \left(a - 2\pi \right)}{\operatorname{tg} \left(\pi + a \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + a \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + a \right)}$$

$$19.12. \quad \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} + a \right) \cos \left(\pi - a \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \sin \left(a - 2\pi \right)} + \frac{\sin \left(\pi - a \right) \cos \left(\pi + a \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + a \right) \cos \left(\frac{3\pi}{2} + a \right)}$$

$$19.13. \quad \frac{\operatorname{tg} \left(\pi + a \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + a \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - a \right)} + \frac{\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - a \right) \operatorname{cotg} \left(\pi - a \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + a \right)}$$

$$19.14. \quad \cos \left(\frac{11\pi}{2} + a \right) \sin \left(\frac{3\pi}{2} + a \right) \operatorname{tg} \left(a - \frac{5\pi}{2} \right) \operatorname{cotg} \left(a + \frac{13\pi}{2} \right)$$

2. Formules d'addition, de factorisation

2.1. Formules d'addition, de duplication, en $\text{tg } \frac{x}{2}$

1. Calculer $\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ$; $\cos 10^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 70^\circ$
2. Sans utiliser la calculatrice, calculer $\sin 105^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\text{tg } 105^\circ$, $\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\text{tg } 165^\circ$
3. On donne $\text{tg } a = \frac{n}{n+1}$ et $\text{tg } b = \frac{1}{2n+1}$; calculer $\text{tg } (a + b)$.
4. Calculer $\sin (a + b)$, $\sin (a - b)$, $\cos (a + b)$, $\cos (a - b)$ sachant que
 - 4.1. $\sin a = \frac{24}{25}$, $\cos b = \frac{3}{5}$ a et b sont du premier quadrant
 - 4.2. $\sin a = \frac{3}{5}$, $\cos b = \frac{8}{17}$ $a \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$
 - 4.3. $\text{tg } a = 2$, $\text{tg } b = 3$ $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $b \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$
5. Simplifier l'expression $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$.
6. Exprimer $\cotg (a + b)$ et $\cotg (a - b)$ en fonction de $\cotg a$ et $\cotg b$
7. Calculer en fonction des sinus et des cosinus de a , b et c :
 $\sin (a - b + c)$; $\cos(a + b - c)$; $\sin (b + c - a)$; $\cos (b - c + a)$
8. Calculer en fonction des tangentes des angles a , b , c :
 $\text{tg } (a - b + c)$; $\text{tg } (a - b - c)$; $\text{tg } (b + c - a)$
9. Calculer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$; $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$; $\text{tg } 3a$ en fonction de $\text{tg } a$
10. Démontrer les identités suivantes :
 - 10.1. $\frac{\sin (a + b) + \sin (a - b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)} = \text{tg } a$
 - 10.2. $\frac{\sin (a + b) - \sin (a - b)}{\cos (a + b) + \cos (a - b)} = \text{tg } b$
 - 10.3. $\frac{\sin (a + b) - \sin (a - b)}{\cos (a + b) - \cos (a - b)} = -\cotg a$
 - 10.4. $\frac{\sin (a - b) + \cos (a + b)}{\sin (a + b) - \cos (a - b)} = \frac{\text{tg } a + 1}{\text{tg } a - 1} = \frac{1 + \cotg a}{1 - \cotg a}$
 - 10.5. $\cos (a + b) \cos (a - b) + \sin (a + b) \sin (a - b) = \cos^2 b - \sin^2 b$
 - 10.6. $\cos (a + b) \sin (a - b) + \cos (a - b) \sin (a + b) = (\sin a + \cos a)^2 - 1$
 - 10.7. $\cos a \cos (b + c) + \sin b \sin (c - a) - \cos c \cos (a + b) = 0$
 - 10.8. $\sin a \sin (b - c) + \sin b \sin (c - a) + \sin c \sin (a - b) = 0$
 - 10.9. $\frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b - c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c - a)}{\cos c \cos a} = 0$

- 10.10. $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$
- 10.11. $\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$
- 10.12. $\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}$
- 10.13. $\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b} = \frac{\sin(b+a)}{\sin(b-a)}$
- 10.14. $\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} b} = -\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$
- 10.15. $\operatorname{cotg} a \cos 2a - \sin 2a = \frac{\cos 3a}{\sin a}$
- 10.16. $\sin 2a - \operatorname{tg} a \cos 2a = \operatorname{tg} a$
- 10.17. $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a}$
- 10.18. $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$
- 10.19. $\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} a = \frac{2}{\sin 2a}$
- 10.20. $\frac{1}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} 2a} = \sin 2a$
- 10.21. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a} = \cos 2a$
- 10.22. $\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + 2 \sin 2a \sin 2b$
- 10.23. $\cos^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \cos 2a \cos 2b$
- 10.24. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \operatorname{tg} 2a$
- 10.25. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)} = \sin 2a$
- 10.26. $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$
- 10.27. $\sin 5a \sin a = \sin^2 3a - \sin^2 2a$
- 10.28. $\sin 5a \sin 3a = \sin^2 4a - \sin^2 a$
- 10.29. $\sin 7a \sin 3a = \sin^2 5a - \sin^2 2a$
- 10.30. $\sin 7a \sin a = \sin^2 4a - \sin^2 3a$
- 10.31. $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \times \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$
- 10.32. $\frac{\cos 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 a)$
- 10.33. $\frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} 2a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} 2a} = \frac{\sin a}{\sin 3a}$

11.

11.1. Etant donné $\operatorname{tg} x = 2$, calculer $\sin 4x$ et $\cos 4x$.

11.2. Etant donné $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer les fonctions trigonométriques de $2x$.

12. Calculer $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ sachant que :

12.1. $\cos a = \frac{8}{17}$ et a est dans le quatrième quadrant,

12.2. $\sin a = \frac{5}{9}$ et a est dans le deuxième quadrant.

2.2. Formules de Simpson, de Carnot, de linéarisation

13. Démontrer les égalités suivantes :

13.1. $\sin 9^\circ \cos 27^\circ \cos 63^\circ \sin 81^\circ = \frac{1}{16}$

13.2. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$

13.3. $4 \cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{3}{4}$

13.4. $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{1}{3}$

13.5. $\operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 25^\circ$

13.6. $4 \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

13.7. $\sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3})$

14. Démontrer les égalités suivantes :

14.1. $2 \sin 65^\circ \cos 35^\circ - 2 \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

14.2. $2 \sin 125^\circ \sin 55^\circ - 2 \cos 110^\circ \cos 40^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

14.3. $\sin^2 39^\circ - \sin^2 21^\circ = \frac{1}{8} (\sqrt{15} - \sqrt{3})$

14.4. $\cos^2 6^\circ - \cos^2 24^\circ = \frac{1}{8} (\sqrt{5} - 1)$

14.5. $\frac{\sin \frac{\pi}{13} \sin \frac{6\pi}{13}}{\cos \frac{6\pi}{13} - \cos \frac{8\pi}{13}} = \frac{1}{2}$

$$14.6. \quad \frac{\sin \frac{\pi}{17} \cos \frac{13\pi}{17}}{\sin \frac{5\pi}{17} - \sin \frac{3\pi}{17}} = -\frac{1}{2}$$

15. Démontrer les identités suivantes :

$$15.1. \quad \frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}$$

$$15.2. \quad \frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b+a}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{b-a}{2}}$$

$$15.3. \quad \frac{\cos a - \cos b}{\sin a - \sin b} = -\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}$$

$$15.4. \quad \frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$$

$$15.5. \quad \frac{\sin (a+b)}{\sin a + \sin b} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}}$$

$$15.6. \quad \frac{\sin (a-b)}{\sin a - \sin b} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}$$

$$15.7. \quad (\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b) = \sin(a+b) \sin(a-b)$$

$$15.8. \quad (\cos a + \cos b)(\cos b - \cos a) = \sin(a+b) \sin(a-b)$$

$$15.9. \quad \cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a = 4 \cos 2a \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$15.10. \quad \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a = 4 \sin \frac{5a}{2} \cos a \cos \frac{a}{2}$$

$$15.11. \quad \cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a = 4 \cos 4a \cos 2a \cos a$$

$$15.12. \quad \cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a = 4 \sin 4a \cos 2a \sin a$$

$$15.13. \quad \frac{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}{\cos a + \cos 2a + \cos 3a} = \operatorname{tg} 2a$$

$$15.14. \quad \frac{\sin 5a + \sin 3a}{\cos 3a + \cos a} = 2 \sin 2a$$

$$15.15. \quad \frac{\sin 5a - \sin 3a}{\cos 5a - \cos 3a} = -\operatorname{cotg} 4a$$

$$15.16. \quad \frac{\sin 2a + \cos 2a}{\cos a - \sin a - \cos 3a + \sin 3a} = \frac{1}{2 \sin a}$$

$$\begin{aligned}
15.17. \quad & \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} + \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \\
15.18. \quad & \sin a + \sin b + \sin (a+b) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} \\
15.19. \quad & \cos a + \cos b + \sin (a+b) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \right) \\
15.20. \quad & \cos a + \cos b + \cos (a+b) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - 1 \\
15.21. \quad & \sin a + \sin b - \cos (a+b) = -1 + 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) \\
15.22. \quad & \sin a + \sin b + \sin c - \sin (a+b+c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \\
15.23. \quad & \cos a + \cos b + \cos c + \cos (a+b+c) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{b+c}{2} \cos \frac{c+a}{2}
\end{aligned}$$

16. Démontrer que si $a + b + c = \pi$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
16.1. \quad & \sin a - \sin b - \sin c = -4 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \\
16.2. \quad & \cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \\
16.3. \quad & \cos a - \cos b - \cos c = 1 - 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \\
16.4. \quad & \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c \\
16.5. \quad & \cos 2a + \cos 2b - \cos 2c = 1 - 4 \sin a \sin b \cos c \\
16.6. \quad & \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2 (1 + \cos a \cos b \cos c) \\
16.7. \quad & \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c
\end{aligned}$$

17. Démontrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

3. Equations trigonométriques

3.1. Equations élémentaires

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin x = -\frac{2}{3}$
2. $\cos x = -0,31318$
3. $\cotg x = -1,51834$
4. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\tg x = 1,46$
6. $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
7. $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$
8. $\sin 4x = \frac{1}{2}$
9. $3 \tg 5x = 1$
10. $\tg^2 x = 1$
11. $\tg \frac{x}{2} = \tg 2x$
12. $\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$
13. $1 + \sqrt{3} \cotg 4x = 0$
14. $\sin x = \sin 9x$
15. $\cotg x + \cotg (x + \frac{\pi}{3}) = 0$
16. $\cos 5x + \cos 3x = 0$
17. $\sin 3x = \cos 2x$
18. $\tg x = \cotg (\frac{\pi}{2} + 2x)$
19. $\tg x \times \cotg 3x = 1$
20. $\tg x \times \tg 4x = 1$
21. $\sin 2x + \sin x = 0$
22. $\tg x + \cotg \frac{\pi}{3} = 0$
23. $\tg x + \tg \frac{\pi}{7} = 0$

3.2. Equations quelconques

Résoudre les équations suivantes :

1. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
2. $6 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
3. $3 \cos^2 - 5 \cos x - 2 = 0$
4. $4 \cos^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{6} = 0$
5. $\tg^2 x - 4 \tg x + 3 = 0$
6. $\tg^2 x + (1 + \sqrt{3}) \tg x + \sqrt{3} = 0$
7. $3 \cos^2 x = 2 \sin^2 x$
8. $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = 3$
9. $\sin 2x = 2 \sin x$
10. $\tg 2x = \tg 2x$
11. $\cos 2x = \cos 2x - \sin x$
12. $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$
13. $1 + \sin x \cos x = \cos^2 x$
14. $\sin x + \sin 3x = \sqrt{3} \cos x$
15. $\sin 2x + \sin 4x = \sin 3x$
16. $2 \cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos x = 0$
17. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$
18. $\tg x + 3 \cotg x = 4$
19. $\cos x + \cos 3x = \sin 2x + \sin 4x$
20. $\tg x + \sqrt{3} \cotg x = 1 + \sqrt{3}$
21. $\cos x + \cos 3x = \sin 3x + \sin 5x$
22. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

23. $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$
24. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$
25. $\operatorname{tg} x - 2 \sin x = 4 \sin 2x$
26. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$
27. $\cos 2x + 7 \sin x - 4 = 0$
28. $\cos 2x + \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \sin x + 1) = 0$
29. $5 \sin 2x - (\sin x - \cos x)^2 = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$
30. $2 \operatorname{cotg} 2x - 1 = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x)$
31. $2 \operatorname{tg} 2x - 1 = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x)$
32. $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$
33. $\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$
34. $\sin 3x = 2 \sin x$
35. $\sin 3x = \sin^2 x$
36. $\sin 3x = 2 \sin^3 x$
37. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 2x + 3 \sin^2 x = 5 \cos^2 x - 1$

3.3. Equations homogènes en $\sin x$ et $\cos x$

1. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$
2. $4 \sin^2 x - 11 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$
3. $2 \cos^2 x - 11 \sin x \cos x + 4 = 0$
4. $3 \sin^4 x - 10 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x = 0$
5. $\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x = 0$
6. $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$

3.4. Equations symétriques en $\sin x$ et $\cos x$

1. $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{9}{8}$
2. $\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}$
3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$
4. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$
5. $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$
6. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$

3.5. Equations de la forme $a \sin x + b \cos x = c$

1. $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2. $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $2 \cos x - 5 \sin x = 2$

4. $5 \sin x - 4 \cos x = 4$

5. $4 \sin x - 3 \cos x = 4$

6. $7 \sin x - 5 \sin x = 5$

7. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

8. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$

9. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$

10. $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{6}$

11. $\sin x + 3 \cos x = 2$

12. $5 \cos x - 2 \sin x = 4$

13. $\sin x + \cos x + \sqrt{3} (\cos x - \sin x) = 2\sqrt{2}$

14. $\sin x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{3} (\cos x + \sin x) = \sqrt{2}$

15. $(\sqrt{3} + 1) \sin x + (\sqrt{3} - 1) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$

16. $5 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 4$

17. $2 \sin^2 x + 2 \sin 2x + \cos^2 x = 3$

4. Inéquations élémentaires

1. $\sin x \geq \frac{1}{2}$

2. $\cos 3x < -\frac{1}{2}$

3. $|\sin x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin \frac{x}{3} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $3 \operatorname{tg}^2 x \leq 1$

6. $\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{3} - 2x \right) \geq 1$

7. $\sin x > \cos x$

8. $\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1$

9. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

10. $2 \sin^2 2x \geq 2 \sin^2 x + 1$

11. $\frac{\cos 2x}{1 - 2 \sin 2x} < 0$

12. $\sin^2 x + \sin x > 0$

13. $\cos^2 x - \sin x > 0$

14. $1 + \sin x > \cos^2 x$

15. $3 \sin x + 2 > 2 \sin^2 x$

16. $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0$

17. $2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0$

18. $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x - 2 < 0$

5. Triangles rectangles

1. Résoudre le triangle rectangle ABC connaissant les éléments suivants :

a	b	c	β	γ
45 125 42,17			40° 15' 50" 47° 21' 44"	35° 12' 32"
45 35 123,4	25 20 85,6			
	63 215 384,13		35° 42' 25" 24° 18' 52"	52° 18' 45"
	45 207 1320	58 171 873		

2. Résoudre le triangle rectangle ABC connaissant les éléments suivants :

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 2.1. $b = 36, \frac{a}{c} = 2,5$ | 2.5. $p = 42, S = 294$ |
| 2.2. $a = 13, b + c = 17$ | 2.6. $S = 216, \frac{b}{c} = \frac{4}{3}$ |
| 2.3. $a = 42, \frac{c}{b} = 1,73205$ | 2.7. $a = 2b, c = 234$ |
| 2.4. $b = 28, a - c = 14$ | 2.8. $a = 50, h = 25$ |

- La hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle rectangle détermine sur cette hypoténuse deux segments dont les longueurs respectives sont 20 cm et 45 cm. Calculer les côtés et les angles de ce triangle, la hauteur relative à l'hypoténuse et l'aire.
- Quelle est la hauteur du soleil au-dessus de l'horizon, si une tour de 25 m de hauteur projette une ombre de 44 m?
- D'un navire on voit sous un angle de 3° 15' 42" un phare de 75 m de hauteur. Quelle est la distance du navire au phare?

6. Un poids de 60 kg repose sur un plan incliné de 27° sur le plan horizontal. Quelle pression ce poids exerce-t-il sur le plan incliné?
7. La base d'un triangle isocèle mesure 20 cm, les côtés égaux mesurent 32 cm. Calculer les angles de ce triangle et la hauteur relative à la base?
8. D'un triangle isocèle on donne les éléments suivants. Compléter le tableau

<i>Base</i>	<i>Côtés égaux</i>	<i>Angle au sommet</i>	<i>Angles à la base</i>	<i>Hauteur relative à la base</i>
a	b	α	β	h
a	b	α	β	h
a	b	α	β	h
a	b	α	β	h

9. Démontrer que dans un triangle isocèle la somme des distances d'un point quelconque de la base aux deux autres côtés est une constante.
10. Les côtés d'un rectangle mesurent 20 cm et 15 cm. Calculer la diagonale de ce rectangle ainsi que les angles que forme cette diagonale avec les côtés.
11. La diagonale d'un rectangle mesure 32 cm et fait un angle de $35^\circ 12'$ avec l'un des côtés. Calculer les côtés de ce rectangle.
12. Dans un trapèze rectangle, les côtés parallèles mesurent 21 cm et 30 cm, le côté de l'angle droit mesure 12 cm. Calculer le quatrième côté de ce trapèze, les angles aigus et les diagonales.
13. Dans un trapèze isocèle, les côtés parallèles mesurent 7 cm et 18 cm et les angles à la grande base $52^\circ 17' 45''$. Calculer les autres côtés de ce trapèze et sa hauteur.
14. Dans un trapèze isocèle, les côtés parallèles mesurent 9 cm et 21 cm, la hauteur mesure 8 cm. Calculer les autres côtés de ce trapèze et les angles.
15. Les diagonales d'un losange mesurent 12,8 cm et 9,6 cm. Calculer le côté et les angles de ce losange.

16. Une diagonale d'un losange mesure 20,8 cm, l'angle opposé $102^{\circ} 16'$. Calculer le côté de ce losange, le deuxième angle et la deuxième diagonale.
17. Calculer l'aire d'un losange connaissant le côté a et un angle A .
18. Dans un cercle de rayon R est tracée une corde de longueur a . Calculer l'angle au centre correspondant et la distance de cette corde au centre.
19. Calculer l'aire du segment de cercle déterminé par une corde de 24 cm dans un cercle de 15 cm de rayon.
20. Calculer l'aire de la partie commune à deux cercles sécants ayant pour rayons respectifs 8 cm et 5 cm, la corde commune étant égale à 6,4 cm.
21. Calculer le côté du polygone régulier convexe à 9 côtés, inscrit dans un cercle de 10 cm de rayon.
22. Calculer le côté du polygone régulier convexe à 7 côtés, inscrit dans un cercle de rayon R .
23. D'un point situé à une distance a du centre d'un cercle de rayon R ($R < a$) on trace deux tangentes à ce cercle. Calculer la longueur des segments tangents limités à leur point de contact; la longueur de la corde des contacts, l'angle que forment entre elles les deux tangentes.
24. Deux circonférences sont tangentes extérieurement et tangentes aux côtés d'un angle de 60° . L'une des circonférences a 10 cm de rayon. Calculer le rayon de la deuxième circonférence.
25. La distance des centres de deux cercles de rayons R et r est d ($d > R + r$). Calculer la longueur des tangentes communes extérieures limitées aux points de contact et l'angle que ces deux tangentes forment entre elles?
26. Résoudre le triangle rectangle ABC connaissant les projections m et n des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.