

EXERCICE (d'après sujet bac S 2003 national)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1. (a) Placer les points A, B et C sur une figure.
 (b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. (a) On appelle r la rotation de centre A telle que $r(B) = C$.
 Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $D = r(C)$.
 (b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
 Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .
3. Soit M un point de Γ d'affixe z , distinct de C et M' d'affixe z' son image par r .
 (a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} ; 2\pi \right[$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.
 (b) Exprimer z' en fonction de θ .
 (c) Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.
 (d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M' par r .