

Équation cartésienne d'une droite

Dans les exercices qui suivent, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$M(x; y)$ appartient à la droite $D(A, \vec{u})$ (droite passant par A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur directeur) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Vous développerez donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ pour trouver la condition liant x et y ; on obtient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{forme implicite}).$$

Si b est non-nul, il est possible d'isoler y ; on obtient ainsi une équation de la forme :

$$y = mx + n \quad (\text{forme explicite, ou forme réduite}).$$

m : pente, ou coefficient angulaire, ou coefficient directeur; n : ordonnée à l'origine.

Attention : un vecteur directeur n'est jamais unique; si $\vec{u}$ est vecteur directeur de D , alors $k \cdot \vec{u}$ ($k \neq 0$) est vecteur directeur de D . De même, il existe une infinité de façons de noter une équation implicite; par contre, l'équation explicite est unique.

1° Déterminez les équations implicite et explicite (si possible) de D :

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(10; 6)$.

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $A(-3; -10)$.

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $A(-3; 1)$.

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(2; 6)$.

5 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(4; -10)$.

2° Déterminez les équations implicite et explicite (si possible) de la droite D passant par les points A et B .

6 $A(-1; -6)$ et $B(-11; -10)$.

7 $A(1; -6)$ et $B(-6; -6)$.

8 $A(6; -10)$ et $B(6; 0)$.

9 $A(-2; 6)$ et $B(-9; -3)$.

10 $A(-6; -10)$ et $B(-2; -6)$.

3° Reprenez maintenant tous les résultats et vérifiez qu'un vecteur directeur de la droite se lit de la façon suivante dans les équations :

– la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ ad-

met comme vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$;

– la droite D d'équation $y = mx + n$, avec $m = \frac{\alpha}{\beta}$, admet comme vecteur directeur :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Solutions

1 $x - 2y + 2 = 0$, $y = \frac{x}{2} + 1$.

2 $-7x + 3y + 9 = 0$, $y = \frac{7x}{3} - 3$.

3 $9x - 10y + 37 = 0$, $y = \frac{9x}{10} + \frac{37}{10}$.

4 $4x + 5y - 38 = 0$, $y = \frac{38}{5} - \frac{4x}{5}$.

5 $2x - y - 18 = 0$, $y = 2x - 18$.

6 $-2x + 5y + 28 = 0$, $y = \frac{2x}{5} - \frac{28}{5}$.

7 $y + 6 = 0$, $y = -6$.

8 $x - 6 = 0$, pas d'équation de la forme $y = \dots$.

9 $-9x + 7y - 60 = 0$, $y = \frac{9x}{7} + \frac{60}{7}$.

10 $x - y - 4 = 0$, $y = x - 4$.

4° Nous savons maintenant établir des équations de droites dont nous connaissons un point et un *vecteur directeur*.

Nous procédons de façon analogue pour les droites dont nous connaissons un point et un *vecteur normal* (orthogonal).

Plus précisément, si $\vec{n}$ est un vecteur normal à D et si A est un point de D , nous écrivons :

$M \in D \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation de la droite passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal :

11 $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(2; 1)$.

12 $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $A(-3; -1)$.

13 $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A(5; 2)$.

14 $\vec{n} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(2; 1)$.

15 $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $A(4; -1)$.

5° Complétez :

- la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ admet comme vecteur normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;
- la droite D d'équation $y = mx + n$, avec $m = \frac{\alpha}{\beta}$, admet comme vecteur normal : $\vec{n} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

6° On considère les droites D et D' d'équations respectives :

$y = mx + n$ et $y = m'x + n'$.

- Comment reconnaître à ces équations si D et D' sont parallèles ?
- Comment reconnaître à ces équations si D et D' sont orthogonales ?

7° Complétez le tableau ci-contre, et donnez dans chaque cas une représentation graphique.

	un point A	un point B	un vecteur directeur	un vecteur normal	équ. cart. (impl.)	équ. cart. (expl.)	pente	ordonnée à l'origine
1.	$A(2; 5)$	$B(-1; 0)$						
2.	$A(1; -3)$			$\vec{n}(2; -1)$				
3.					$2x - 3y + 2 = 0$			
4.						$y = 0,64x - 1$		
5.	$A(-2; 1)$							-1
6.		$B(0; 0)$					0,75	
7.				$\vec{n}(2; -1)$				-3
8.	$A(2; 5)$	$B(2; 0)$						
9.						$y = 2$		

8° On donne les équations des côtés d'un triangle ABC :

$$(AB) : y = x - 2, (BC) : y = -\frac{x}{2} + 7, (CA) : y = 3x$$

- Trouvez les coordonnées des sommets du triangle.
- Calculez les coordonnées des milieux des côtés du triangle.
- Déterminez les équations des médianes du triangle ainsi que leur point d'intersection G .
- Déterminez les équations des hauteurs du triangle ainsi que leur point d'intersection H .
- Déterminez les équations des médiatrices du triangle ainsi que leur point d'intersection I .
- Montrez que G , H et I sont alignés.
- Calculez les longueurs des côtés et l'aire du triangle ABC .
- Calculez les angles du triangle.
- Calculez les rayons des cercles circonscrit et inscrit.
- Reproduisez la figure ci-dessous sur votre ordinateur.

