Exercice 2 – non spécialistes - 5 points

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;

– chacun des suivants, $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;

– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;

– etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5} \end{cases}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.

b. Démontrer que (u_n) est croissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3. Évolution des probabilités $p(E_n)$

a. À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.

b. Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0{,}49999 \leq p(E_n) \leq 0{,}5$?