

Exercice 3 – Commun à tous les candidats - 4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4 \text{ cm}$.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\frac{1}{z}$ où \bar{z} désigne le conjugué du nombre complexe z .

A. Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z' .
2. Démontrer que les points O , M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1.

On note (C) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1|=1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble (C) ?

2. Soit M un point de (C) d'affixe z , distinct du point O .

a. Démontrer que $|z'+1|=|z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1|=|z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1|=1$?

3. Tracer l'ensemble (C) sur une figure. Si M est un point de (C), décrire et réaliser la construction du point M' .