Exercice n°3 (5 points) – Commun à tous les candidats.

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».

A_n l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte.

a_n la probabilité de l'évènement A_n , b_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Donner a_1 et b_1.

Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n > 0,6665$.