Classe de Terminale S₅

Devoir de mathématiques n°7*

Version dure

Pour $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$.

1) Exprimer u_n à l'aide du symbole Σ. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme fractionnaire et sous forme décimale approchée.
2) Pour tout $x \geqslant 0$, démontrer les inégalités $\ln(1+x) \leq x$ et $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$ (on pourra étudier les variations de fonctions bien choisies). En déduire que pour tout entier $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1)-\ln(k) \leq \frac{1}{k} \qquad [1]$$
3) En sommant les inégalités [1] pour k allant de 1 à n, prouver que pour tout n :
$u_{n+1}-1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$, en déduire que $\ln(n+1) \leq u_n \leq 1+\ln(n)$ [2]
4) Quelle est la limite de (u_n) ? Déterminer le rang à partir duquel on a $u_n \geq 100$.
5) On considère la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = u_{n-1}-\ln(n) = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}-\ln(n)$
Calculer $v_{n+1}-v_n$, en déduire le sens de variation de (v_n) en utilisant la question 2).
6) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $v_n \leq 1+\ln(n-1)-\ln(n)$ en utilisant l'inégalité [2]. En déduire que (v_n) est majorée, puis qu'elle est convergente. On note γ sa limite.
7) Donner à l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur une valeur approchée de v_{10000}.

Remarque culturelle : la constante γ, limite de la suite (v_n), s'appelle constante d'Euler Mascheroni (car on ne sait pas qui, de ces deux mathématiciens, l'a découverte le premier). Elle vaut environ $\gamma \simeq 0,5772156649011532860606 51...$ Euler en a calculé 16 décimales en 1734 (sans calculatrice, ce qui est d'autant plus impressionnant que nous venons d'en trouver péniblement 3 à l'aide de la calculatrice). Ce nombre est mystérieux, en particulier, on ne sait toujours pas s'il est rationnel ou non. Il intervient dans certains résultats d'arithmétique, par exemple : Pour tous les entiers compris entre 1 et n, le nombre moyen de diviseurs est proche de $\ln(n)+2C-1$ (résultat prouvé par Dirichlet en 1838)