

PROBLEME (d' après bac D 93)

1) soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty [$ par $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$
étudier les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0
Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f et en déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty [$

2) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty [$ par $g(x) = x - 1 + \frac{\ln(x)}{x}$

Soit C la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
l'unité graphique est de 4 cm

a) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $f(x)$ ont le même signe sur $]0 ; +\infty [$
étudier les variations de g . Etudier la limite de g en 0 et en $+\infty$

Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à C .
étudier la position de C par rapport à Δ

b) Montrer qu'il existe un point de C où la tangente T à C est parallèle à Δ .
Donner les coordonnées du point de contact de T et C
Construire C, T, Δ

c) prouver que l'équation $g(x) = 1$ a une solution unique α , donner un encadrement de α
à $0,01$ près