GEOMETRIE DANS L'ESPACE PE 1

Une définition (rappel) :

Modélisation de l'espace sensible
(objets de la réalité physique)
en objets théoriques
(objets de la pensée)
par le biais d'une représentation

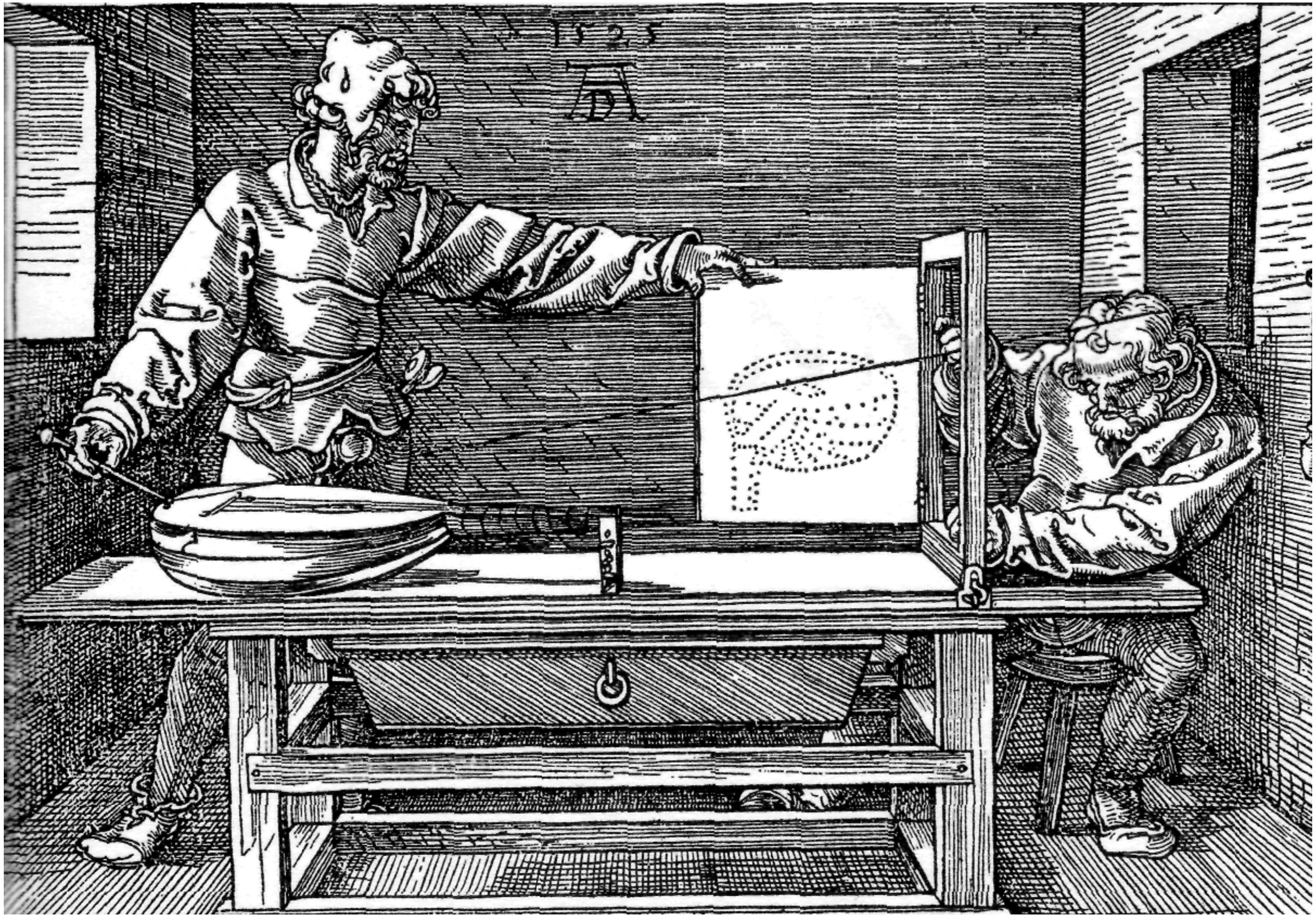
1. Quelle représentation ?

- L'espace sensible est de dimension 3 (3D) : sa représentation sur un support plan obéit à des lois complexes (les différentes perspectives).
- Deux de ces perspectives sont couramment utilisées de nos jours :
  - ➢La perspective des peintres de la renaissance (perspective centrale)
  - ➢La perspective des mathématiciens (perspective cavalière)

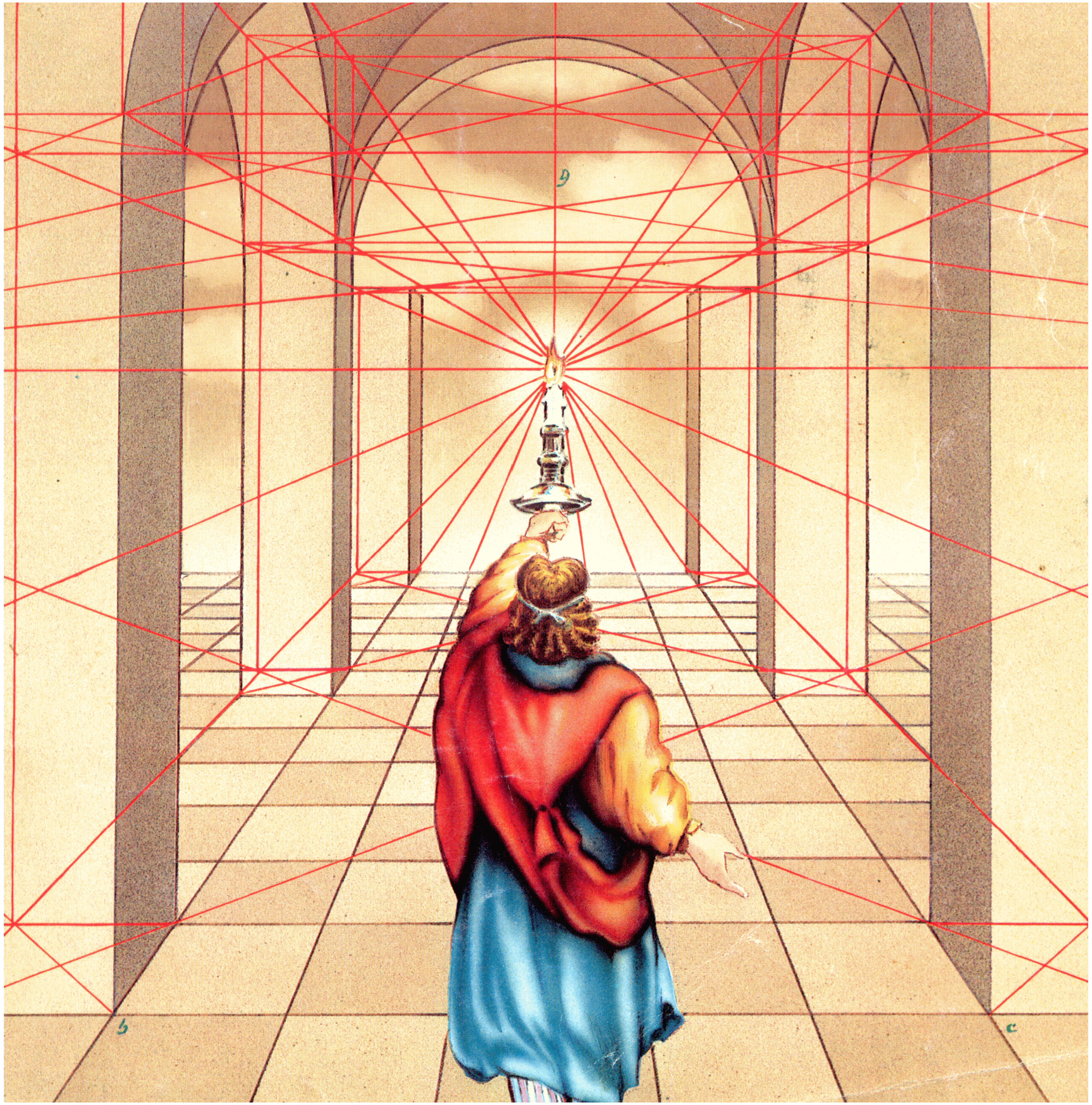
L’évolution des représentations en perspective dans le monde occidental

Enluminure du Haut Moyen Age (Chantilly, Musée de Condé, cliché Girandon)

« La cène » de Duccio (vers 1300) (cliché Scala)

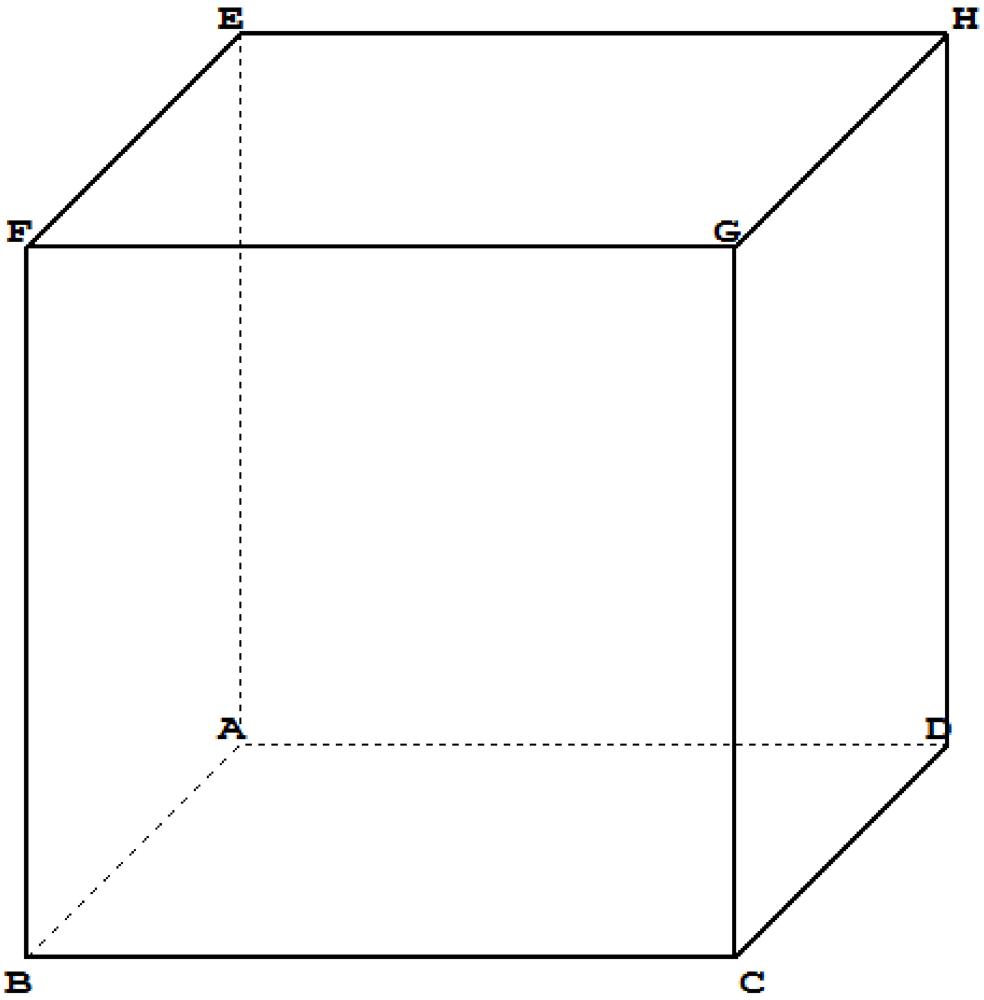


Gravure d’Albrecht Dürer (vers 1525)



La perspective des peintres de la Renaissance (La Recherche n° 160)

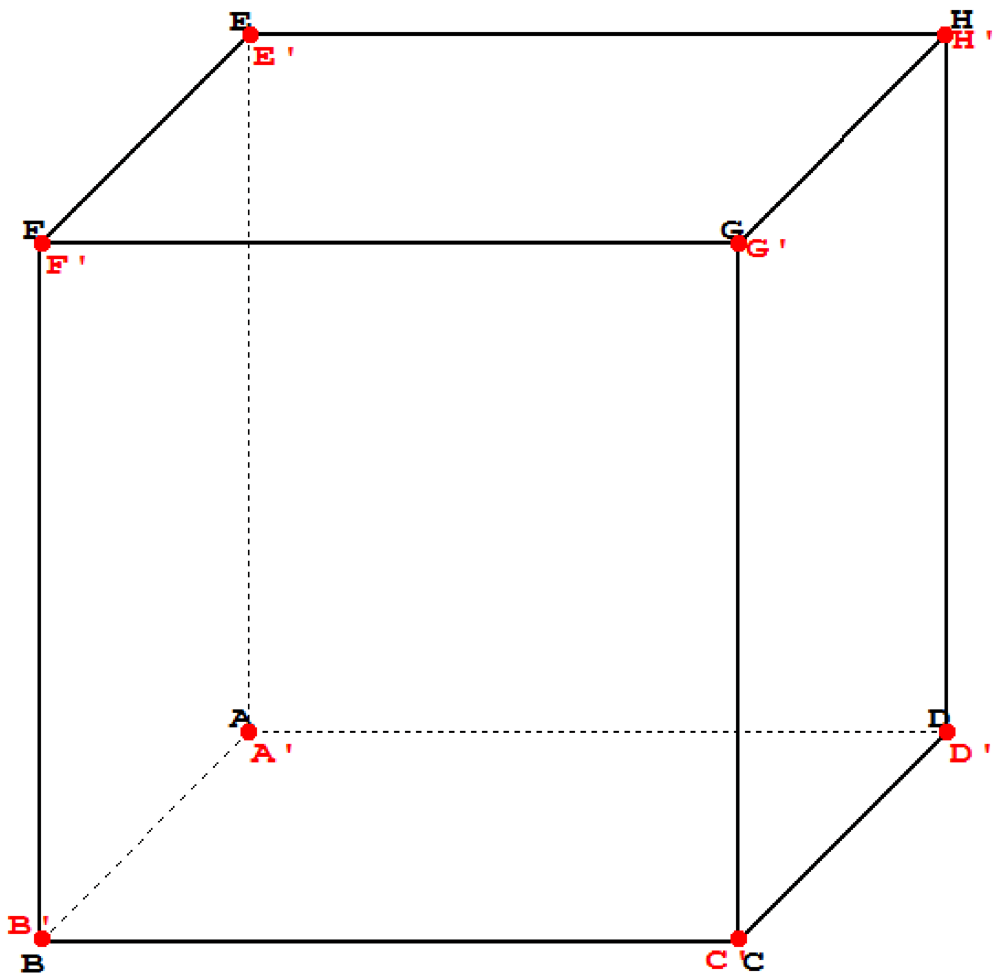
- *les droites parallèles au support plan sont représentées sans déformation (en particulier, les angles sont conservés, ainsi que les milieux),*
- *les droites non parallèles au support plan sont représentées sécantes en un point de fuite situé sur une ligne de fuite lorsqu'elles sont parallèles (en particulier, les alignements sont conservés, mais pas les angles, ni les milieux)*



La perspective du mathématicien

- *les droites parallèles au support plan sont représentées sans déformation (en particulier, les angles sont conservés, ainsi que les milieux),*
- *les droites non parallèles au support plan sont représentées parallèles suivant une direction de fuite lorsqu'elles sont parallèles (en particulier, les alignements sont conservés, ainsi que les milieux, mais pas les angles).*

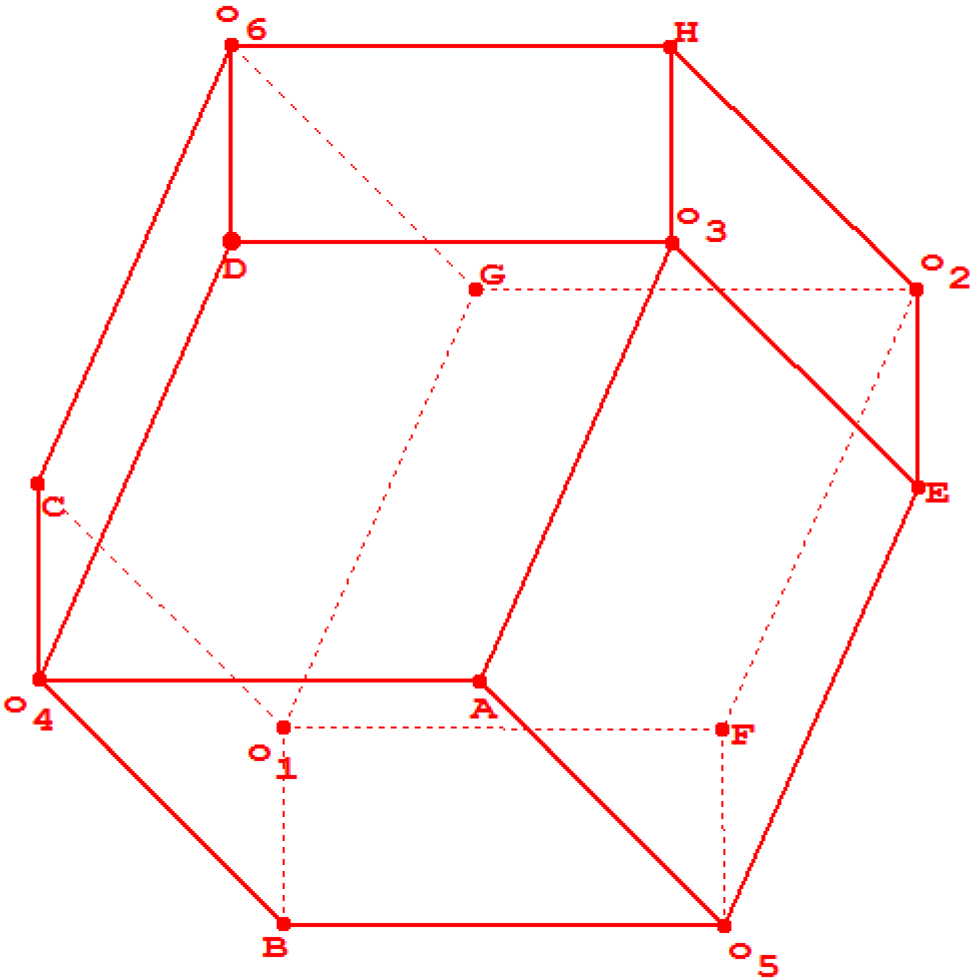
2. Un problème majeur : la perte d'information par la représentation



Perspective cavalière :

ABCDEFGH est un cube ;
A'B'C'D'E'F'G'H' est-il un cube ?

Quelle validation visuelle en perspective cavalière ?



Le rhombododécaèdre :

- les faces sont-elles toutes les mêmes ?
- quelles sont leurs formes ?

Conséquences

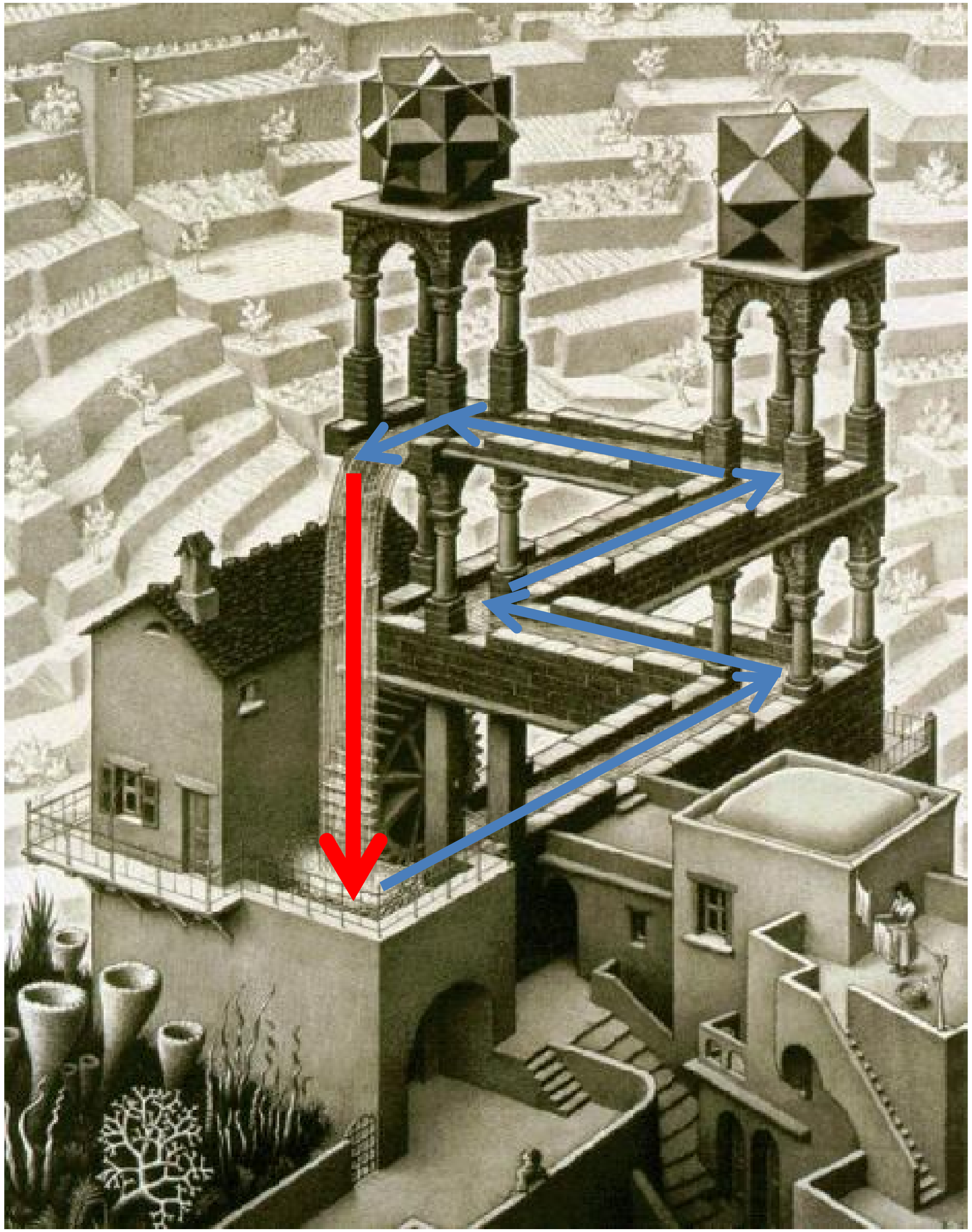
- Validation perceptive :
  - ➢ attention aux impressions fausses (intersections, orthogonalités, longueurs, dans les plans qui ne sont pas de face)
  - ➢ possibilité de valider les parallélismes et les rapports de côtés de même direction (Théorème de Thalès)
- A l'école primaire :
  - ➢ faire manipuler de vrais objets 3D (maquettes, patrons)
  - ➢ utiliser les représentations prototypiques avec précaution….

3. Un mémento des compétences de géométrie de l'espace en cycle 3

CE2	CM1	CM2
- Reconnaître, décrire et nommer un cube, un pavé droit. - Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet. - Reproduire des figures (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un modèle.	- Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, prisme. -Reconnaître ou compléter un patron de cube ou de pavé. - Décrire une figure en vue de l'identifier parmi d'autres figures ou de la faire reproduire.	- Reconnaître, décrire et nommer les solides droits : cube, pavé, cylindre, prisme. -Reconnaître ou compléter un patron de solide droit.
		- Formule du volume du pavé droit (initiation à l'utilisation d'unités métriques de volume).

Pour finir, un tableau de...

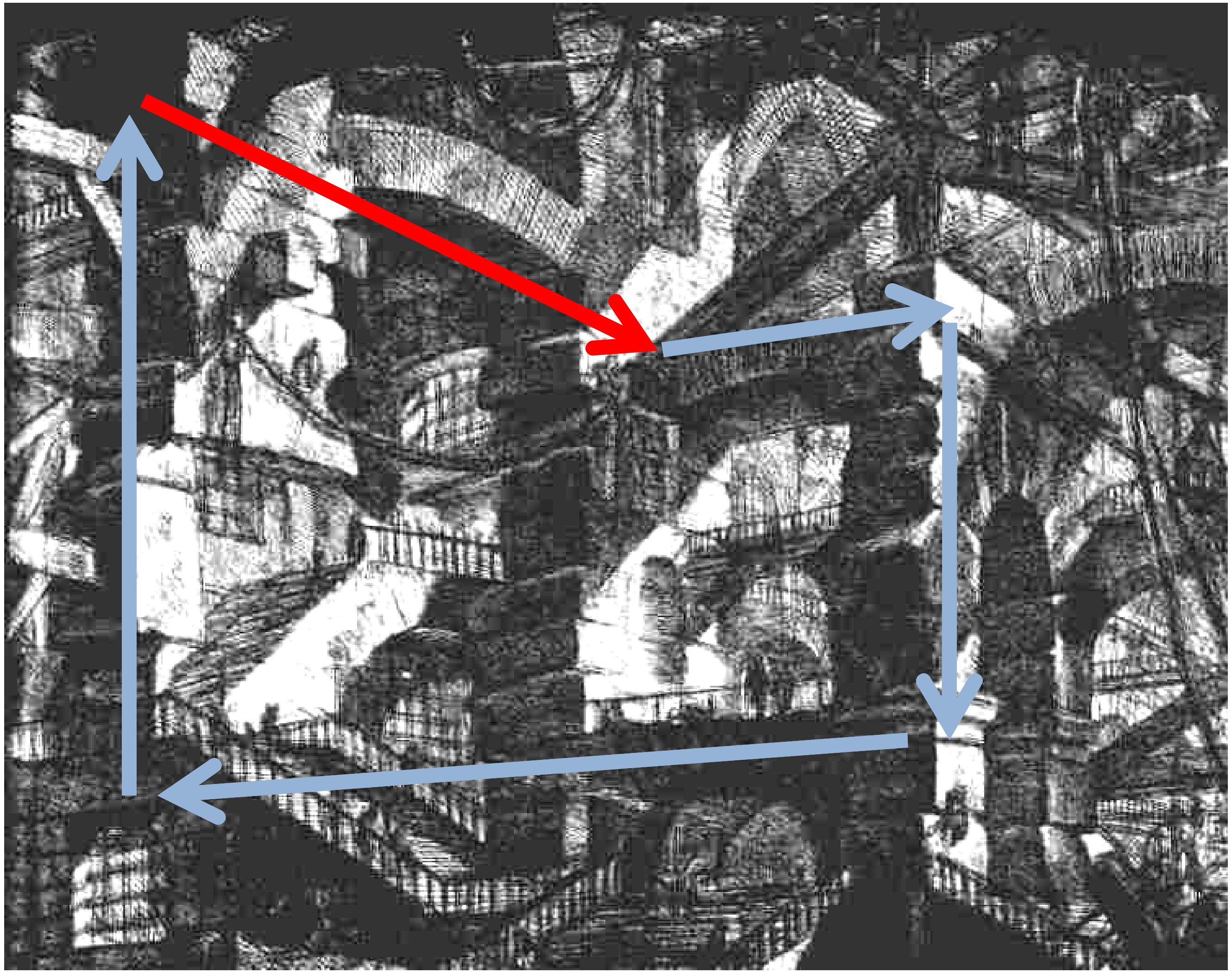
Roger Magritte (1898-1967) : la trahison des images (1929)



un autre
de...

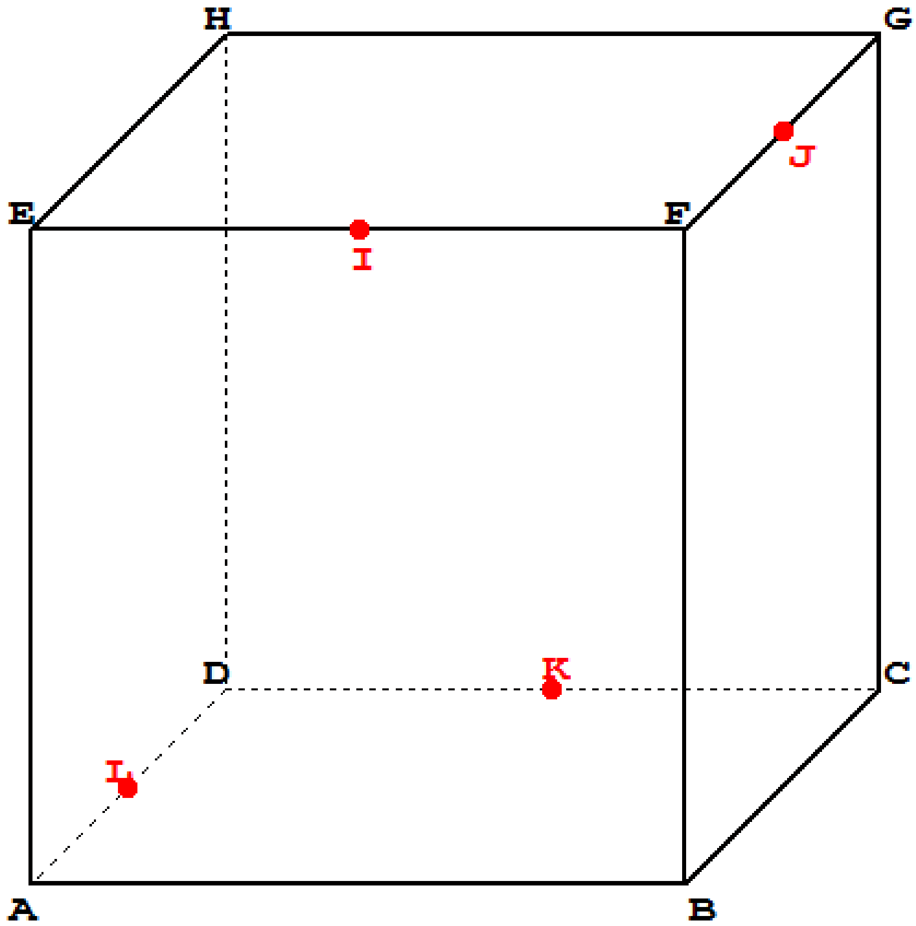
Maurits Escher (1898-1972) :
le mouvement perpétuel
(1961)

Et enfin, le dernier de...



Giambattista Piranese (1720-1778), "Les prisons imaginaires",1745

4. Notions essentielles de géométrie dans l'espace



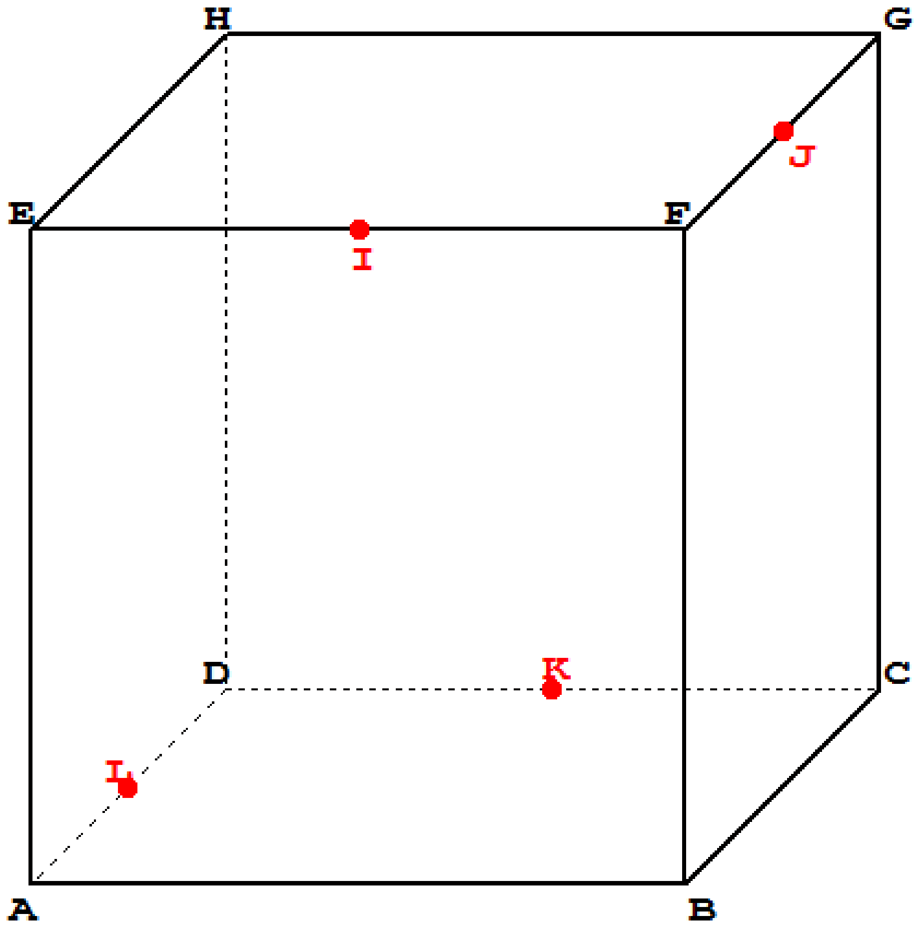
I. Détermination d'un plan

- à partir de **3 points** *A*, *B*, *C* **non alignés**

- à partir de **2 droites** *D* et *D'* s**écantes**

- à partir de **2 droites** *D* et *D'* **parallèles**

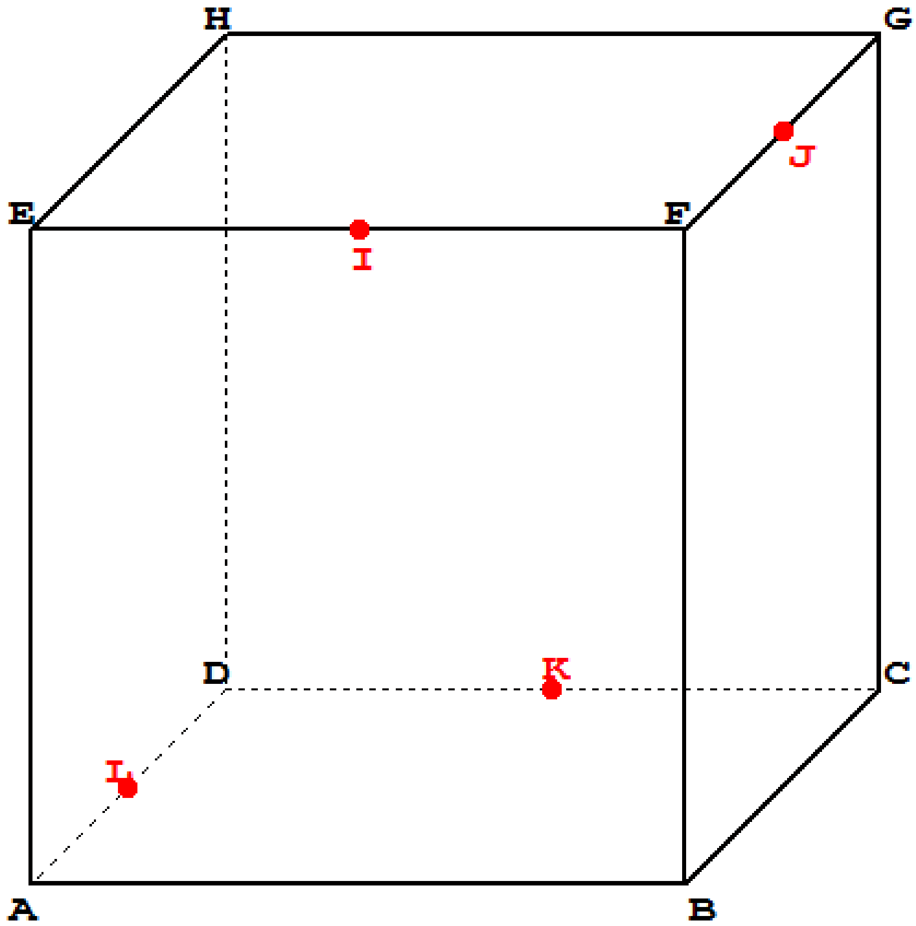
- à partir d'**une droite** *D* et d'**un point** *A* qui **n'appartient pas à** *D*



Propriétés

Si **2 points distincts** *A* et *B* appartiennent à un **même plan** *P* alors **tout point de la droite** (*AB*) **appartient au plan** *P*.

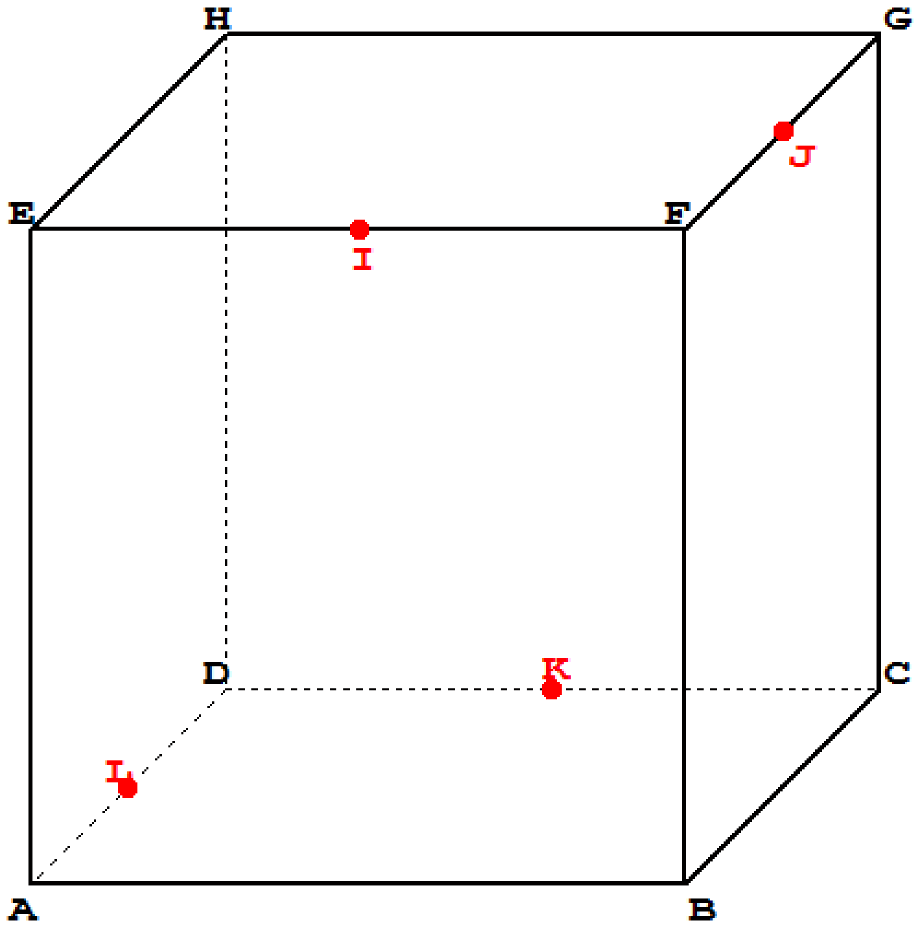
On dit alors que la **droite** (*AB*) est **<u>incluse</u>** dans le **plan** *P* (notation : $(\boldsymbol{AB}) \subset \boldsymbol{P}$)



Définition

2 droites incluses dans **un même plan** sont dites **coplanaires**.
Quatre points appartenant à **un même plan** sont aussi dits **coplanaires**.

Remarque : 4 points ne sont en général pas coplanaires !



II. Positions relatives de deux plans

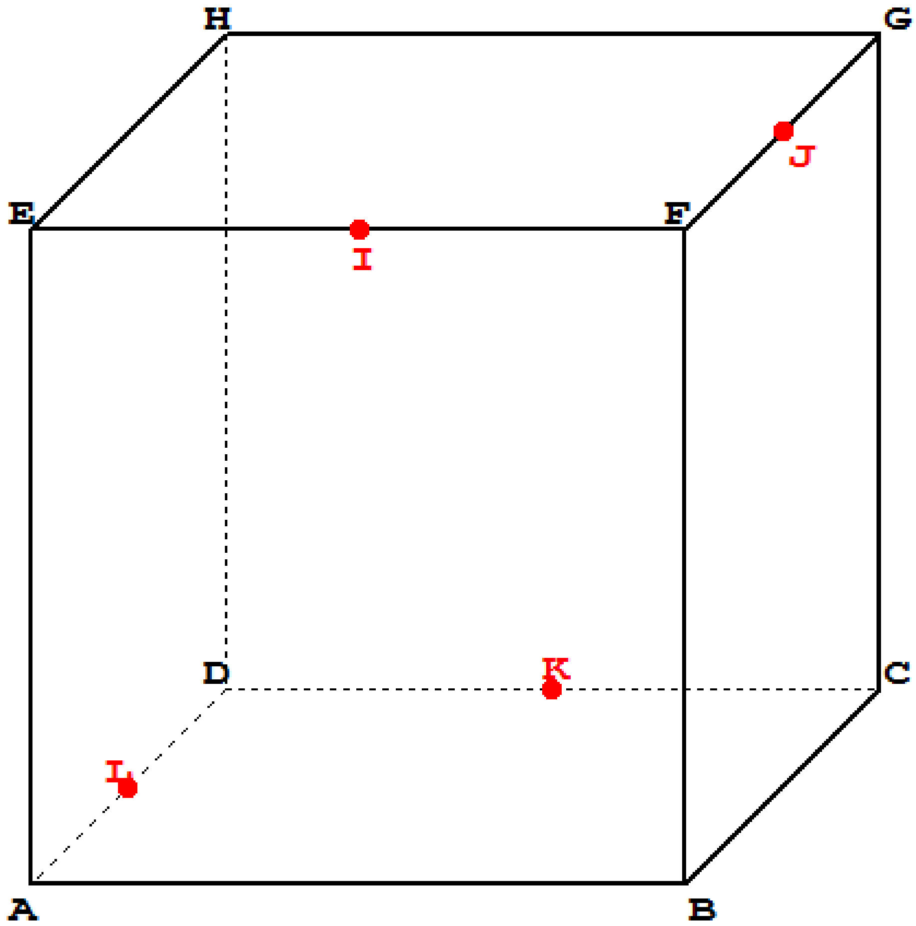
2 plans peuvent être :

- soit **sécants**

- soit **parallèles**

Théorème : Si 2 plans sont sécants , leur intersection est 1 droite.

Méthode : pour trouver la droite d'intersection de deux plans sécants, il suffit de trouver deux points appartenant à la fois aux deux plans.



III. Positions relatives de deux droites

2 droites peuvent être :

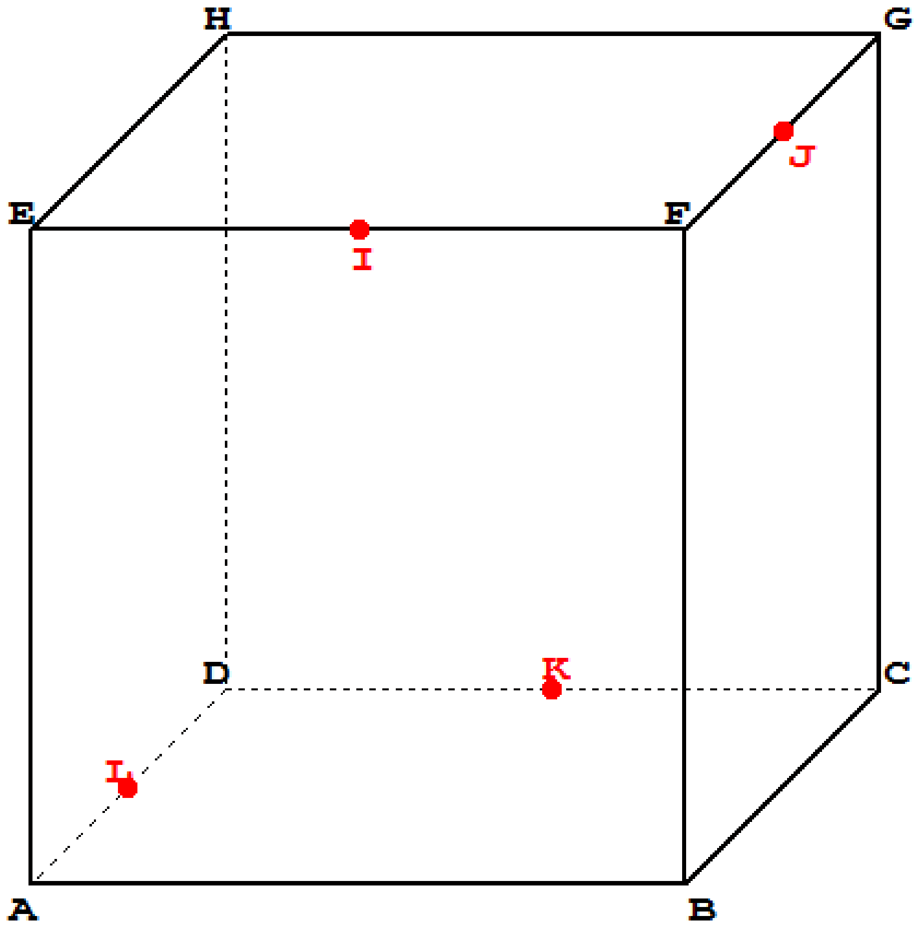
- soit **coplanaires :**

elles sont alors :

• soit **sécantes**

• soit **parallèles**

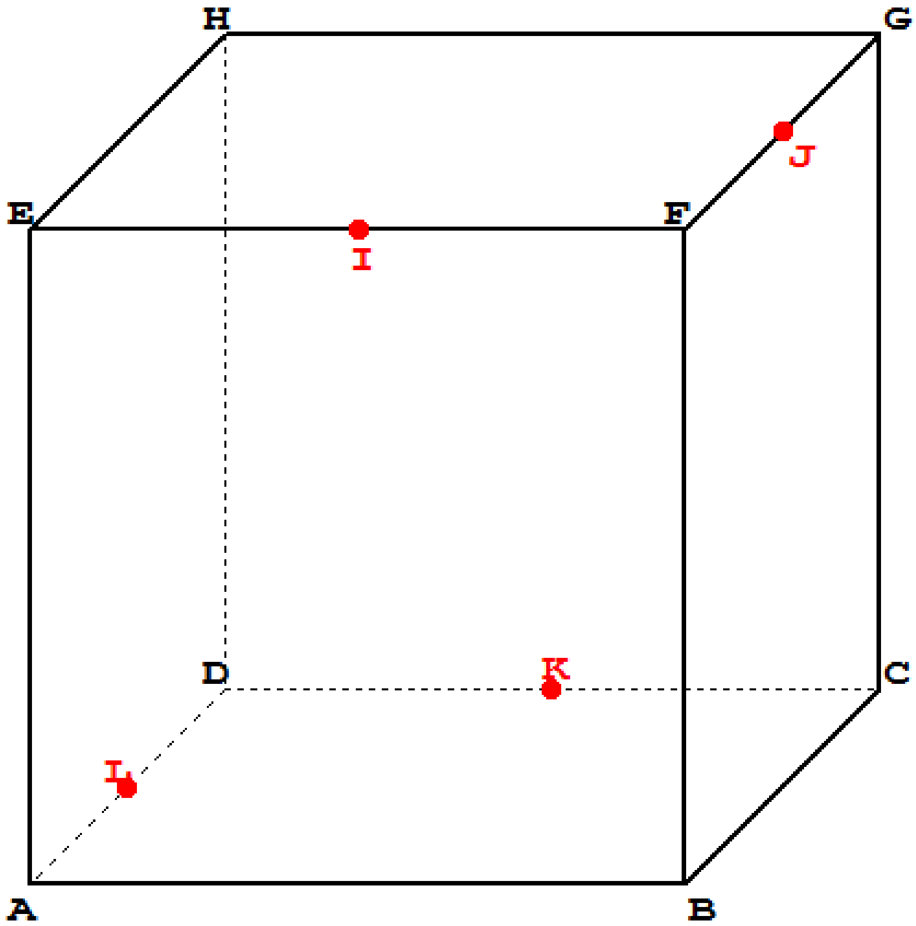
- soit **non coplanaires**



Remarques :

- Si (AB) est parallèle ou sécante avec (DC), alors les points A, B, C et D sont coplanaires.
- Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.
- Deux droites non parallèles ne sont pas forcément sécantes !

Méthode : pour montrer que deux droites sont sécantes , on montre qu'elles sont coplanaires et non parallèles.



IV. Positions relatives d'un plan et d'une droite

Un plan et **une droite** sont :

- soit **sécants**

- soit **parallèles**

1^er^ cas : la **droite** *D* et le **plan** *P* sont ***strictement parallèles*** (**aucun** point de *D* n'appartient à *P*)

2^e^ cas : la **droite** *D* est ***incluse*** dans le **plan** *P* (on note $D \subset P$: ***tous*** les points de *D* appartiennent à *P*)

Théorème : si un plan et une droite sont sécants , leur intersection est un point.