CORRIGE DU TEST MATHEMATIQUES PE1 11/2010 (2h00)

Exercice 1 :

1. $A = \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{13+\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{41}{3}} = \dfrac{3}{41}$.

2. $B = -(a-b) = -a+b = -13+\dfrac{2}{3} = -\dfrac{37}{3}$.

Exercice 2 :

1. En décomptant de 4 en 4 à partir de 61, on forme les nombres $n = 61 - 4q$. On a donc $61 = 4q + n$. Le nombre terminant cette liste est le plus petit positif, c'est-à-dire le reste r de la division euclidienne de 61 par 4, c'est-à-dire $r = 1$.

2. a. Le raisonnement est le même que précédemment : le nombre terminant cette liste est le plus petit nombre positif n tel que $n = 9843 - 4q$, c'est-à-dire le reste r de la division euclidienne de 9843 par 4, c'est-à-dire $r = 3$.

b. $9843 = 4\times2460 + 3$, et $3 = 4\times0 + 3$, la liste comporte autant de termes que la liste $0 ; 1 ; \ldots ; 2460$. Elle comporte donc 2461 termes.

c. Le premier terme est $9843 = 4\times2460 + 3$, le deuxième terme est $9839 = 4\times2459 + 3$. Le 100^{e} terme est donc $N = 4\times2361 + 3 = 9447$.

Exercice 3 :

1. $\dfrac{1}{18}$ est une fraction irréductible, avec $18 = 2\times3^2$, dénominateur dont la décomposition ne comporte pas que des 2 et des 5, donc $\dfrac{1}{18}$ n'est pas un décimal.

$\dfrac{81}{24} = \dfrac{27}{8} = 3{,}375$, donc $\dfrac{81}{24}$ est un décimal.

$\dfrac{7}{175} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$, donc $\dfrac{7}{175}$ est un décimal.

$\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$, donc $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ est un décimal.

2. a. On trouve $\dfrac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$.

b. La période comporte 6 chiffres, et $32 = 6\times5 + 2$. On en déduit que la 32^{e} décimale du développement périodique de $\dfrac{1}{7}$ est le 2^{e} chiffre de la période 142857, donc est 4.

3. a. La vingtième décimale de l'écriture décimale de $\dfrac{42}{17}$ se lit dans la cellule B22 : c'est 5.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8
24	4	8

b. $\dfrac{42}{17} = 2{,}\overline{4705882352941176}$

c. Sachant que l'on divise par 17, on sait que les seuls restes possibles sont tous les entiers de 0 à 16. Parmi ces 17 restes, on doit éliminer 0, car la division ne tombera pas juste (car $\dfrac{42}{17}$ n'est pas décimal, 17 ne comportant pas que des 2 et des 5 dans sa décomposition). Il existe donc au plus 16 restes possibles. La première case comportant un reste étant A2, la 16^{e} est A17, donc la case A18 comportera nécessairement un reste déjà obtenu.

4. $100a - a = 123{,}\overline{23} - 1{,}\overline{23} = 122$, d'où $99a = 122$, d'où $a = \dfrac{122}{99}$, écriture fractionnaire irréductible.

Exercice 4 :

1. Pour que les deux maisons soient situées à égale distance de la mer, il suffit que le point P soit le point d'intersection de la droite (d) et de la médiatrice (m) du segment $[M_1M_2]$: en effet, P étant un point de la droite (m), on aura $PM_1 = PM_2$.

Programme de construction :

- Tracer la médiatrice (m) du segment $[M_1M_2]$;
- Tracer le point P intersection des droites (d) et (m).

2. On trace les points H_1 intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M_1 et H_2 intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par M_2.

3. a. Voir la figure.

b. Le point M'_2 étant le symétrique de M_2 par rapport à la droite (d), et P étant un point de (d), le triangle $PM_2M'_2$ est isocèle de sommet P, d'où $PM_2 = PM'_2$.

c. La longueur totale du chemin $M_1 - P - M_2$ est égale à $M_1P + PM_2$. La longueur du chemin $M_1 - P - M'_2$ est égale à $M_1P + PM'_2$. Or $PM_2 = PM'_2$ d'après la question b, donc $M_1P + PM_2 = M_1P + PM'_2$.

d. Le chemin le plus court sera celui tel que $M_1I + IM'_2$ soit le plus court, c'est-à-dire quand les points M_1, I, et M'_2 sont alignés. Le chemin passant par P n'est donc pas le plus court. Le point I correspondant au plus court chemin possible est donc le point d'intersection de la droite (d) et du segment $[M_1M'_2]$.

Question complémentaire

1. Les élèves peuvent utiliser un compas, et constater que le cercle de centre A passant par M coupe la droite (d) en un deuxième point. Ils peuvent aussi utiliser une règle, et faire la même constatation.

Dans les deux cas, ils doivent prolonger la droite (d) hors du cadre.

2. Les élèves peuvent tracer la perpendiculaire (p) à la droite (d) passant par A avec une équerre et construire le point H intersection des droites (d) et (p)..

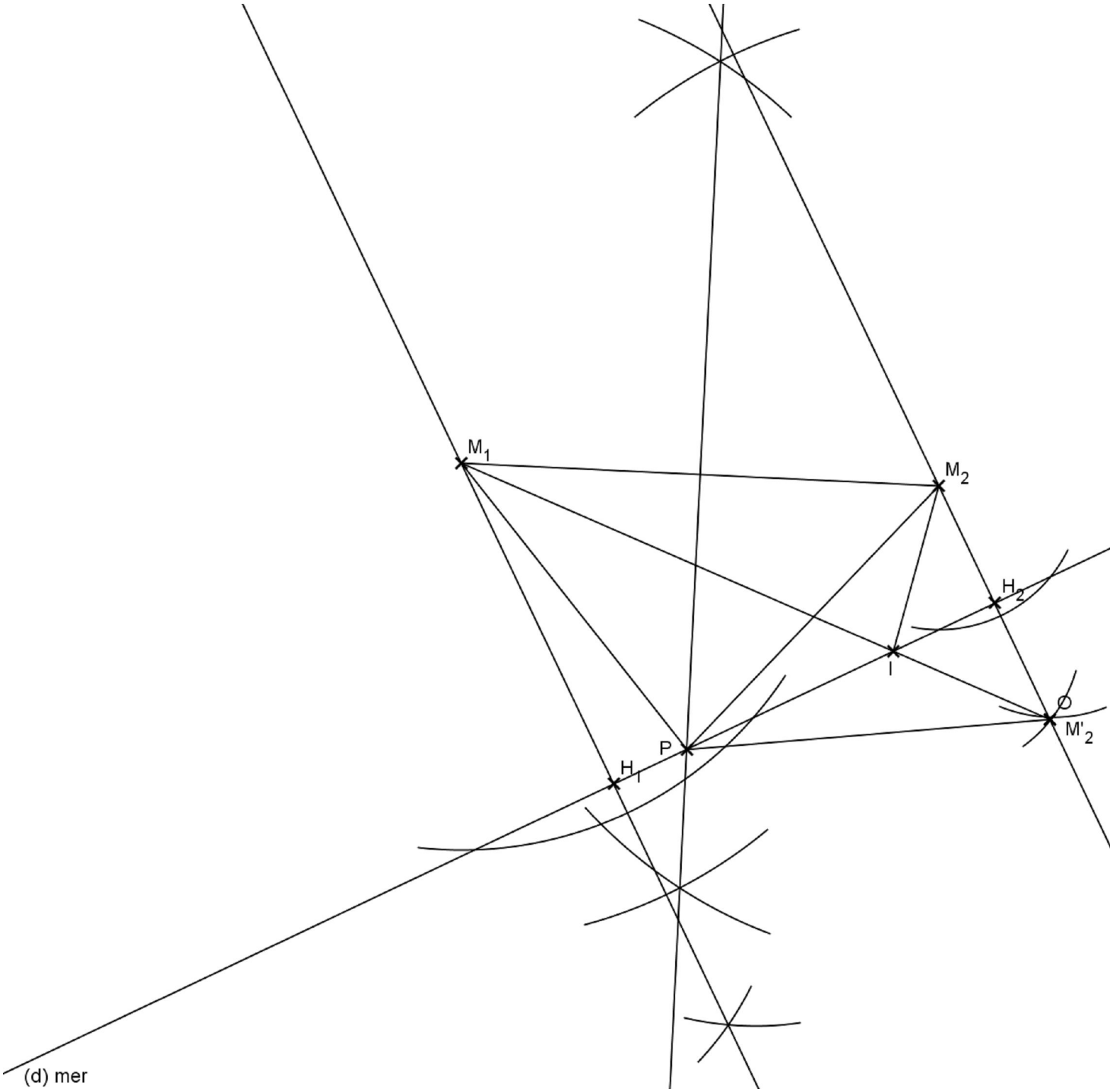
3. Si on considère les questions 1 ou 2, la notion sous-jacente est la notion de cercle de centre donné et de rayon donné.

Si on considère la question 3, c'est la notion de droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné (ou encore la notion de distance d'un point donné à une droite donnée, qui relève du collège).

Si on considère l'ensemble des questions, c'est la notion d'intersection d'un cercle donné et d'une droite donnée (positions relatives : sécants, tangents, qui relève du collège).

4. 1er cas : notion de cercle de centre donné et de rayon donné, ou d'intersection d'un cercle donné et d'une droite donnée. L'exercice adapté pour renforcer la notion est l'exercice 3.

2e cas : notion de droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné, ou de distance d'un point donné à une droite donnée. L'exercice adapté pour renforcer la notion est l'exercice 2.

L'exercice 1 est à exclure, car il aborde aussi la notion de droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné, qui n'est pas abordée dans l'exercice.

Annexe