

**PROBLEME : - 11 points - Commun à tous les candidats**

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

**Partie A : Étude de la demande**

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité  $x$  disponible sur le marché est modélisé par la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$

$$\text{par } g(x) = \frac{50}{x^2 + x + 1}$$

Le prix unitaire  $g(x)$  est exprimé en euros et la quantité  $x$  en millions d'objets.

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Calculer  $g'(x)$ .

Étudier les variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$  et donner le tableau de variation.

3. Soit  $C_g$  la courbe représentative de  $g$  dans un repère orthogonal du plan.

Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_g$  au point d'abscisse nulle.

4. Tracer  $T$  et  $C_g$  (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

**Partie B : Étude de l'offre**

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité  $x$  exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale.

On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité  $x$ ) est modélisé par la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = 3e^{0,26x}$

Le prix unitaire  $f(x)$  est exprimé en euros.

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$

2. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

3. Tracer  $C_f$  dans le même repère que  $C_g$ .

### Partie C : Recherche du prix d'équilibre

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre  $p_o$  pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle  $q_o$  la quantité associée à  $p_o$ .

- Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre  $p_o$  et d'autre part de la quantité associée à  $q_o$ .
- On pose  $h(x) = f(x) - g(x)$  pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ .
  - Déduire des parties A et B le sens de variation de  $h$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $q_o$  sur  $[2 ; 3]$ .
    - Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à  $10^{-2}$  de  $q_o$ .
- Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre  $p_o$ , on donnera le résultat arrondi à  $10^{-2}$  près.

### Partie D : Surplus des producteurs

On appelle surplus des producteurs le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix  $p_o$ .

Il est obtenu à partir de l'expression :

$$S_p = p_o q_o - \int_0^{q_o} f(x) dx. \text{ Il est exprimé en millions d'euros.}$$

- Donner une interprétation graphique de  $S_p$  (on interprétera  $p_o q_o$  comme l'aire d'un rectangle).
- Calculer  $S_p$  en fonction de  $p_o$  et  $q_o$ .
  - Déterminer une valeur arrondie à  $10^{-1}$  de  $S_p$  exprimée en millions d'euros.