

**Exercice n°4 – 6 points – Commun à tous les candidats**

Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

**Partie I : étude des coûts hebdomadaires de production**

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité  $x$  de médicament produit.

Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction  $C_m$  définie pour les nombres réels  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 10]$

par :  $C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}$  ( $C_m(x)$  est exprimé en centaines d'euros,  $x$  en kilogrammes).

Étudier les variations de la fonction  $C_m$ , puis dresser le tableau de variations de la fonction  $C_m$  sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction  $C_m$ .

Déterminer la fonction  $C$ , primitive de la fonction  $C_m$  sur l'intervalle  $[0 ; 10]$  qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que  $C(0) = 0$ .

**Partie II : étude du bénéfice hebdomadaire.**

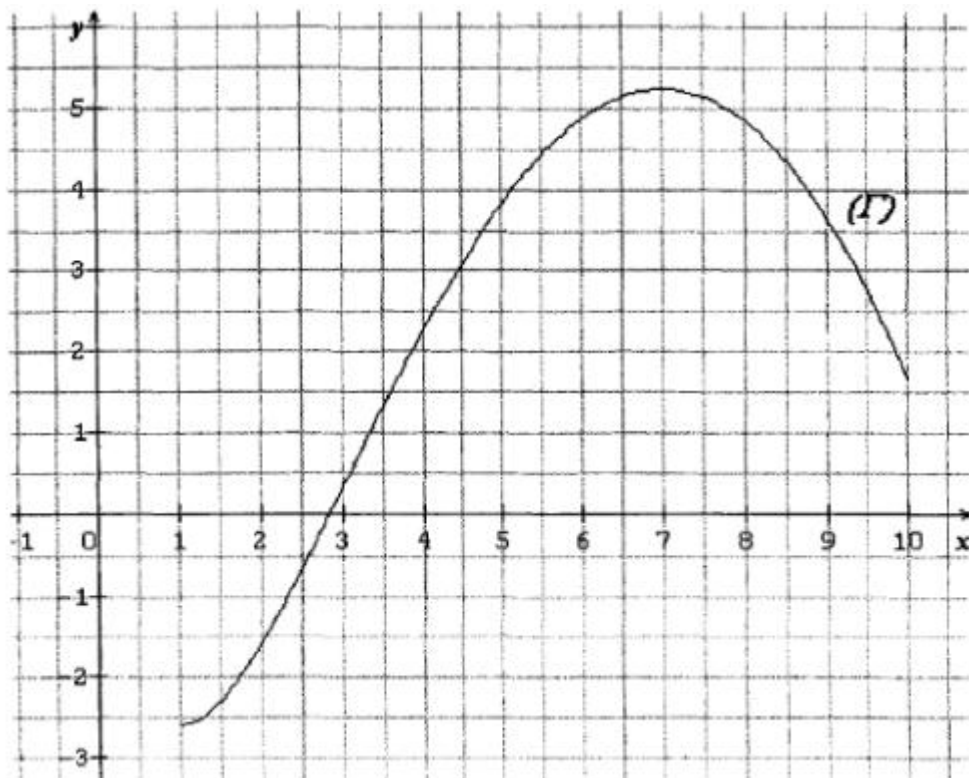
On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu.

Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse  $x$  (exprimée en kilogrammes) de médicament produit.

Il peut être modélisé par la fonction  $B$  définie sur l'intervalle  $[1 ; 10]$

par :  $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16 \ln(x+1)$

La représentation graphique de la fonction  $B$  dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe  $(\Gamma)$  donnée ci-dessous.



**1. a.** On admet que la fonction  $B$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[1 ; 7]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[7 ; 10]$ .

En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.

**b.** Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).

**2. a.** Utiliser la courbe  $(\Gamma)$  pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité  $x_0$  de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.

**b.** Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de  $x_0$  approchée au centième.