Problème *(9 points)*

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

A. ÉTUDE D'UNE FONCTION f

On définit la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

   Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O,\vec{u})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O,\vec{v})$.

   Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ et représenter la courbe $\mathscr{C}$.

B. UTILISATION D'UNE ROTATION

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z, la rotation r associe le point M′ d'affixe z'.

1. *a.* Donner z' en fonction de z.

   On note $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ $(x, y, x', y'$ réels), exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

   b. Déterminer les coordonnées des points A′, B′ et P′ images respectives des points A, B et P par la rotation r.

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-2x}+2e^{-x}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

   a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à $\mathscr{C}$, son image M′ par r appartient à Γ.

   On admet que lorsque le point M décrit $\mathscr{C}$, le point M′ décrit Γ.

   b. Tracer sur le graphique précédent les points A′, B′, P′ et la courbe Γ (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

C. CALCUL D'INTÉGRALES

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. *a.* Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe $\mathscr{C}$ d'extrémités B et A.

   b. On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{5/4}^{3}\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)dx$.

   Trouver une relation entre $\mathscr{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

1 MAOS ME 1