Exercice n°4 (6 points) – Commun à tous les candidats.

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par $f_1(x)=2x-2+\ln(x^2-1)$

a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Déterminer la dérivée de f_1.

c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n , définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f_n(x)=2x-2+\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$

a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0;+\infty[$

d. Justifier que, pour tout entier naturel n, $0<\alpha_n<1$.

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_n)>0$.

4. Étude de la suite (α_n)

a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.

b. En déduire qu'elle est convergente.

c. Utiliser l'expression $\alpha_n=1-\dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.