PROBLÈME *(11 points)*

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_1(x) = x\,e^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de C_1 par rapport à Δ.
5. Tracer C_1 et Δ.

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_3(x) = x^3\,e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminer les positions relatives de C_1 et C_3.
3. Tracer C_3 dans le même repère que C_1 (on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).
4. On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1, les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3, les deux axes de coordonnées et la droite D.
   a) Calculer A_1.
   b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_3 = -\dfrac{1}{2e} + A_1$.

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n\,e^{-x^2}$.
On note C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
2. On appelle S_n le point de C_n d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n, C_n passe par S_2.
   Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
3. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}\left[-1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$
   c'est-à-dire $g(x) = \exp\left[\dfrac{x}{2}\left(-1 + \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right]$
   a) Étudier le sens de variation de g.
   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = g(n)$.
   En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.