

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0, \pi[$.

On note M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle (\vec{AB}, \vec{AM}) en fonction de θ .
En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.
3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'.
Montrer que $z' = \bar{z}$ puis que M' appartient à \mathcal{C} .
4. Dans toute la suite on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$.
On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r .
 - a) Définir l'image \mathcal{C}' du cercle \mathcal{C} par r .
Placer sur une figure A, B, \mathcal{C} , M, \mathcal{C}' puis le point M' image de M par r .
 - b) Montrer que le triangle AMO est équilatéral.
 - c) Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{C}' se coupent en O et en M'.
 - d) Soit le point P symétrique de M par rapport à A.
Montrer que M' est le milieu de $[A'P]$.