

Exercice A5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (1) : $\frac{z-2}{z-1} = z$.

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (2) : $\frac{z-2}{z-1} = i$.

On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives z , 1 et 2.
On suppose que M est distinct des points A et B.

a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

b. Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. a. Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution dans \mathbb{C} de l'équation $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b. Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (3) : $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i$.

On cherchera les solutions sous forme algébrique.