Exercice 2 *enseignement commun* **7 points**

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel *n* par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Etudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

Démontrer que la suite (t_n) est constante.

Exercice 3 *enseignement commun* **6 points**

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes

1. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

a) Déterminer les limites de *f* aux bornes de $]0; +\infty[$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$ est asymptote à la courbe représentative de *f*.

2. Soit *f* la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

a) Justifier que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a $0 < f(x) \leq 1$.

b) Soit *r* un réel avec $0 < r \leq 1$. Comment doit-on choisir *x* dans $[0 ; +\infty[$ pour que $0 < f(x) < r$?

c) En déduire, en utilisant la définition, la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \cos\frac{1}{x} = \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} = \qquad \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \qquad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} =$$

Exercice 4 *enseignement commun* **2 points :**

On considère une fonction *f* définie sur un intervalle I et un nombre réel *a* appartenant à I.

1. Rappeler la définition de « *f* est dérivable en *a* ».

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une fonction *f* vérifiant simultanément les deux propriétés.

Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté); dans le cas contraire, justifier la réponse à l'aide d'un théorème du cours.

– *f* est continue en *a* et *f* est dérivable en *a* ;
– *f* est continue en *a* et *f* n'est pas dérivable en *a* ;
– *f* n'est pas continue en *a* et *f* est dérivable en *a* ;
– *f* n'est pas continue en *a* et *f* n'est pas dérivable en *a*.