Exercice B2

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ell n\,x}{x}$.

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.

La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2\,\ell n\,x$

1°) Étudier le sens de variation de g.

2°) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1+\ell n\,x}{x}$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1°) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

c) Déterminer la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0\,;+\infty[$.
Montrer en particulier que (Δ) coupe $(\mathscr{C})$ en un point A que l'on déterminera.

3°) Étudier le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.

4°) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ est parallèle à (Δ).
Préciser les coordonnées de B.

5°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α.
Justifier l'encadrement : $0{,}34<\alpha<0{,}35$

6°) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites (Δ) et (T).

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1°) a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n=4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

b) Montrer que $a_n=\dfrac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.
En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.