2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

$(O\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit *A* le point d'affixe 1 + *i*.

Au point *M* d'affixe *z*, on associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que $z'=\frac{1}{2}\left(z+i\overline{z}\right)$.

1. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec *x*, *y*, *x'* et *y'* réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x'=\frac{1}{2}\left(x+y\right)$ et $y'=\frac{1}{2}\left(x+y\right)$. En déduire que le point *M'* appartient à la droite (O*A*).

b. Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que *M* =*M'*.

c. Démontrer que pour tout point *M* du plan les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

2. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de *M* par *r*, M_2 le point d'affixe $z_2=\overline{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement *M* a pour affixe 4 + *i*, placer les points *M*, M_1, M_2, M_3.

b. Exprimer z_1 en fonction de *z*, puis z_3 en fonction de *z*.

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z'-z=\frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM'=\frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points *M*, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre *O* si et seulement si $MM'=\frac{1}{2}OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

3. Exercice 2 (spécialistes)