Problèmes, équations et inéquations
PE 1

Première partie

La résolution de problèmes en mathématiques

1. Qu’est-ce qu’un problème ?

Un problème, c’est

- une situation initiale, comportant certaines données ;
- un but à atteindre, explicite ou implicite ;
- une solution qui n’est pas immédiatement disponible.

En conséquence, un problème

- oblige à élaborer une suite d’actions (procédure) ;
- fait entrer dans une démarche de recherche.

Exemples : deux problèmes pour les mathématiciens

La conjecture de Goldbach : tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers. Une preuve jusqu'à 100

Non résolu à ce jour !

Le théorème des quatre couleurs : quatre couleurs suffisent pour différencier les pays de n'importe quelle carte. Un exemple

Résolu en 1977

Différence entre problème et exercice

Un exercice :

- est une activité dans les apprentissages scolaires qui consiste en l'application d'un modèle de résolution (opération, théorème, règle).
- permet d'appliquer une procédure connue, ou une procédure de résolution toute faite.

Exemple : une construction d'un hexagone régulier à la règle et au compas

2. Différents types de problèmes

- Problème fermé : énoncé prescriptif
  - toutes les données sont présentes dans l'énoncé
  - le but à atteindre est unique et clairement explicité (consigne explicite).
  - la méthode est souvent indiquée. Un exemple ?
- *Entre les deux : problème semi-ouvert…*
- Problème ouvert : énoncé non prescriptif
  - certaines données peuvent manquer
  - le but à atteindre est souvent peu explicité.
  - la méthode n'est pas indiquée. Un exemple ?

Types de problèmes et objectifs de la résolution de problèmes dans les programmes (doc. d'accompagnement)

Quatre types de problèmes sont évoqués dans les programmes et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents :

- problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance ;
- problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer ;
- problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances ;
- problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.

Qu’est-ce qu’une situation problème ?

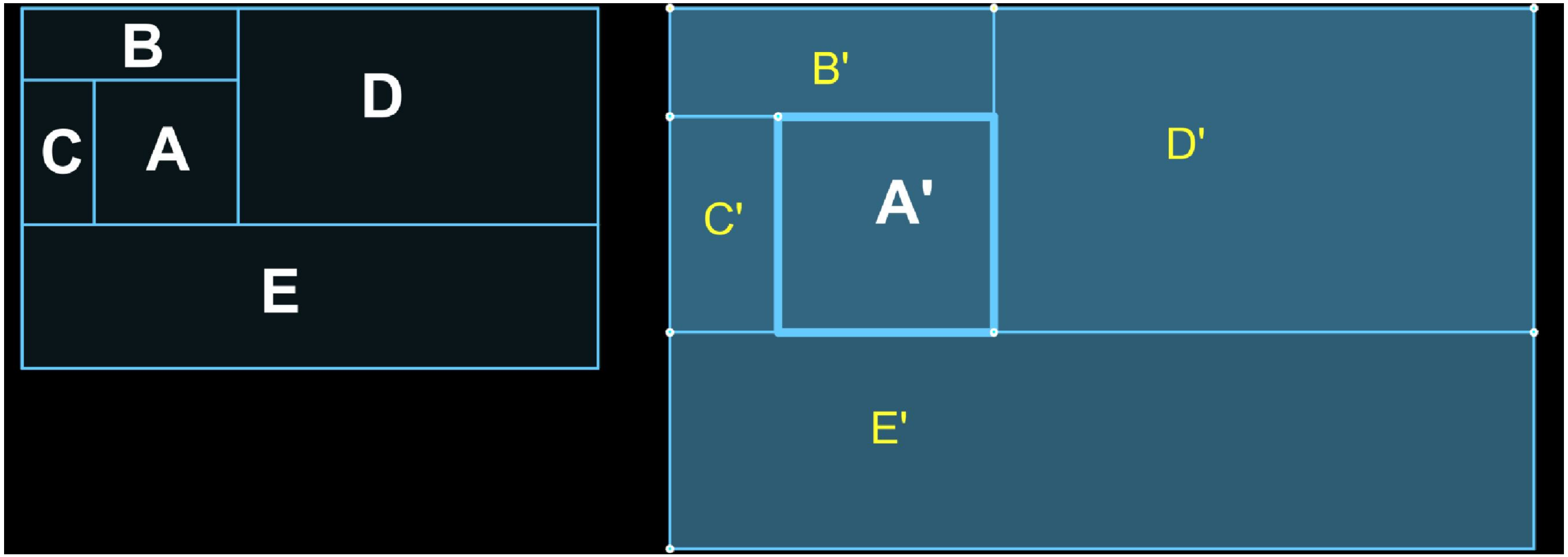
- Elle peut être de deux types :
  - confrontation des élèves à une conception erronée ;
  - amélioration de procédures connues (expertise).
- Elle s’appuie sur un texte simple et une situation facilement compréhensible : les élèves doivent pouvoir entrer facilement dans le problème.
- Les critères de réussite doivent pouvoir être contrôlés par les élèves eux-mêmes (auto-évaluation), afin qu’ils puissent confronter leurs productions.
- Les connaissances qu’elle est censée faire acquérir sont les plus pertinentes pour les élèves à ce niveau (expertise).

Un exemple page suivante

Agrandissement d'un puzzle (d'après Ermel, Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cycle 3, CM2, p. 303 à 308), Hatier Editeur)

La situation suivante est présentée à des élèves de CM2 : la maîtresse ou le maître donne aux élèves la figure donnée en annexe, présente au tableau les rectangles R et R' l'un à côté de l'autre, avec chaque pièce indiquée par sa lettre, puis dit aux enfants : « La pièce A' est un agrandissement de la pièce A : découpez-là, puis découpez quatre pièces B', C', D', E' de manière à former le grand rectangle R' comme au tableau ». Annexe

Rectangle R   Rectangle R'



3. Différentes étapes de la résolution de problèmes

- Lire l'énoncé et le comprendre (représentation mentale) : données, état initial, état final ;
- Elaborer une procédure, constituée en général d'un enchaînement d'opérations ou d'utilisation de propriétés (chaînage avant, chaînage arrière, analogie : stratégie de recherche) ;
- Exécuter la procédure ;
- Valider la procédure ;
- Communiquer une solution.

4. Difficultés rencontrées par les élèves et remèdes possibles

- dans la compréhension de l’énoncé ;
  - ❑ *lire attentivement, expliciter le vocabulaire et les formes grammaticales (actif, passif, …), reformuler ;*
- dans le traitement des données ;
  - ❑ *utiliser des dessins, des schémas, des fiches méthodologiques ;*
- dans le choix d’une procédure adéquate ;
  - ❑ *reconnaître des situations, utiliser l’analogie, inventer ;*
- dans la rédaction d’une solution ;
  - ❑ *se ramener à un schéma de rédaction préétabli ;*
- psychologiques : apprendre, c’est changer, et résoudre un problème c’est risquer ;
  - ❑ *dédramatiser l’erreur : la positiver ; encourager la prise de risque, l’effort, la persévérance.*

Deuxième partie

La résolution d’équations et d’inéquations :

méthodes arithmétiques, algébriques et graphiques

1. Qu’est-ce qu’une équation, une inéquation ?

Définition : une équation (inéquation)

- est une égalité (inégalité) contenant une ou plusieurs données inconnues,
- cette égalité (inégalité) n’étant vérifiée que pour certaines valeurs des inconnues, appelées solutions de l’équation (inéquation).

Attention : le symbole « = » n’a pas la même signification dans une équation (l’égalité n’est vraie que pour certaines valeurs des inconnues) et dans une identité (l’égalité est vraie pour n’importe quelle valeur de la variable).

Exemples :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

est une identité,

- $3x + 2 = 5x - 4$

est une équation du premier degré à une inconnue x,

- $3a + 2 < 5a - 4$

est une inéquation du premier degré à une inconnue a*,*

- $y^2 = 5$

est une équation du second degré à une inconnue y*,*

- $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

2. Différentes méthodes de résolution

- Méthode exhaustive : tester les solutions éventuelles une par une (nombre de tests de vérification fini, calcul exact ou approché),
- Méthode algébrique : trouver toutes les solutions par un calcul littéral (calcul exact ou approché),
- Méthode graphique : représenter la ou les équations graphiquement (calcul approché, test de vérification nécessaire pour calcul exact).

2. Un exemple

J'ai posté 34 lettres : certaines étaient affranchies à 0,50 €, d'autres à 1,50 €. Au total, j'ai payé 38 €. Combien y avait-il de lettres affranchies à 0,50 € ?

- Méthode exhaustive : utilisation d'un tableau (éventuellement d'un tableur),
- Méthode algébrique : résoudre un système de deux équations à deux inconnues,
- Méthode graphique : représenter le système précédent graphiquement, puis vérifier le résultat lu sur le graphique.

3. Quelques techniques

a. Equation du premier degré à une inconnue :

(du type $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres)

- Mettre les x dans le premier membre, les constantes dans l'autre : on se ramène à $Ax = B$,
- si A n'est pas nul, utiliser l'équivalence

$$Ax = B \text{ équivaut à } x = B/A.$$

Un exemple :

$3x + 5 = x - 7$ équivaut à

$2x = -12$, équivalente à

$x = -12/2 = -6$

L'équation proposée a une seule solution : $x = -6$

b. Inéquation du premier degré à une inconnue :

(du type $ax + b < cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres)

- Mettre les x dans le premier membre, les constantes dans l'autre : on se ramène à $Ax < B$,
- utiliser l'équivalence

Si $A > 0$, $Ax < B$ équivaut à $x < B/A$ *(on garde le sens <)*

Si $A < 0$, $Ax < B$ équivaut à $x > B/A$ *(on change le sens <)*.

Un exemple :

$3x + 5 > x – 7$ équivaut à

$2x > – 12$, équivalente à

$x > – 6$ *(on divise par* $A = 2 > 0$*, donc on garde le sens >)*

L'inéquation proposée a pour solutions tous les $x > – 6$

c. Equation simple du second degré à une inconnue :

(du type $ax^2 = b$, où a et b sont des nombres positifs)

- Se ramener à $x^2 = A$, avec $A > 0$,
- utiliser l'équivalence

$x^2 = A$ équivaut à $x = \sqrt{A}$ *(solution positive)*

ou $x = -\sqrt{A}$ *(solution négative)*.

Un exemple :

$3x^2 - 12 = 0$ équivaut à

$x^2 = 4$, équivalente à

$x = 2$ ou $x = -2$

L'équation proposée a deux solutions : $x = 2$ ou $x = -2$

d. Autres équations à une inconnue :

(du type $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fonctions)

- Se ramener à $f(x) - g(x) = 0$,
- factoriser $f(x) - g(x)$ sous la forme $A(x)B(x)$ ou $A(x)/B(x)$
- Utiliser l'une des deux équivalences :

$$A(x)B(x) = 0 \text{ équivaut à } A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

$$A(x)/B(x) = 0 \text{ équivaut à } A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0$$

Un exemple :

$3x^2 + 12 = 12x$ équivaut à

$x^2 - 4x + 4 = 0$, équivalente à

$(x - 2)^2 = 0$

L'équation proposée a une seule solution : $x = 2$.

e. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

(du type $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ où a, b, c, d, e et f sont des réels)

- Méthode 1 : substitution.
- Méthode 2 : combinaison linéaire.
- Méthode 3 : graphique.

Un exemple : $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

- Substitution : $3x - y = 7$ équivaut à $y = 3x - 7$

La deuxième équation donne $5x + 2(3x - 7) = 8$

équivalente à $11x = 22$, équivalente à $x = 2$.

La première équation donne $y = -1$.

La solution du système est $x = 2$ et $y = -1$.

- Combinaison : $3x - y = 7$ équivaut à $6x - 2y = 14$

La somme des deux équations donne $11x = 22$,
équivalente à $x = 2$.

La première équation donne $y = -1$.

La solution du système est $x = 2$ et $y = -1$.

f. Résolutions graphiques d'équations et inéquations à une inconnue :

(du type $f(x) = g(x)$, ou $f(x) < g(x)$, où f et g sont des fonctions dont on connaît la représentation graphique)

- Equation $f(x) = g(x)$: déterminer graphiquement l'abscisse des points d'intersection des deux courbes, puis vérifier éventuellement par le calcul.
- Inéquation $f(x) < g(x)$: déterminer graphiquement l'abscisse des points de la courbe représentant la fonction f situés en dessous des points de la courbe représentant la fonction g.

Un exemple : résoudre l'inéquation $x^2 + 3x < 4$.

4. Un exemple de problème pouvant être traité par diverses méthodes

Deux véhicules A et B roulent sur deux routes perpendiculaires. Le véhicule A roule deux fois moins vite que le véhicule B. Le véhicule A roule vers le croisement et se trouve à 10 km de ce croisement. Le véhicule B se trouve au croisement.

1. Le conducteur du véhicule A dit : « Si je poursuis ma route, je vais de nouveau me retrouver à 10 km du véhicule B dans 4 km. »

A-t-il raison ?

2. Quelle sera la distance minimale entre ces deux véhicules s'ils poursuivent leur route ?