PROBLEME (d' après bac c 1994)

le plan P est muni d' un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 5 cm)

1) On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par f(0) = 1 et pour x > 0

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. justifier que f est continue en 0

2) a) étudier le sens de variation de la fonction g définie sur [0 ; +∞ [par :

$g(x) = \ln(1+x) - (x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3})$. calculer g(0) et en déduire que sur [0 ; +∞ [

$\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

b) par une étude analogue , montrer que si $x \geq 0$ alors $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$

c) établir que pour tout x > 0 on a : $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$

en déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

3)a) Soit h la fonction définie sur [0 ; +∞ [par $h(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

étudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h sur [0 ; +∞ [

b) Montrer que sur]0; +∞ [$f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variations de f en précisant la limite de f en +∞

d) tracer Cf et tracer la tangente au point d' abscisse 0