Exercice A2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).
Pour tout l'exercice on pourra admettre ou démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1°) Étudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2°) Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3°) En déduire le tableau de variation de g.

4°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans IR .
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α

5°) En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1°) Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2°) Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

3°) En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.

4°) Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

5°) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
Préciser la position de (C) par rapport à Δ.

6°) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

7°) Tracer Δ, T puis (C).