D S 1 – F O N C T I O N S , P E R S P E C T I V E C E N T R A L E p1

Exercice n°1 (5points)

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Vous justifierez vos réponses. On rappelle que :

- Pour confirmer une affirmation, il faut faire une démonstration.
- Pour réfuter une affirmation, on peut faire une démonstration mais il suffit parfois de donner un contre-exemple.

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x+6}$.

1. Le point $A\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe de f.
2. L'ensemble de définition D de f est $\mathbb{R}$.
3. La fonction f est strictement décroissante sur l'ensemble de définition D.
4. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point B d'abscisse 1 est $\dfrac{13}{32}$
5. Le tableau de signes de f est :

valeurs de x	$-\infty$		-3		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
signe de f(x)		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Exercice n°2 (8points)

On définit sur [0 ; 12] la fonction f par son expression $\boxed{f(x)=0{,}1x^3-2{,}1x^2+12x-5}$. On souhaite étudier les variations de cette fonction.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=0{,}3(x-4)(x-10)$
2. En déduire le signe de f ' et dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 12].
3. Remplir un tableau de données sur $[0\,;12]$ avec un pas de 1.
4. Tracer la courbe de f avec application sur $[0\,;12]$.

Application économique : Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. On modélise grâce à la fonction f étudiée ci-dessus ses bénéfices journaliers (en centaines d'euros) en fonction du nombre d'ordinateurs (en dizaines d'unités) fabriqués chaque jour. L'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 120 ordinateurs par jour.

Vous répondrez aux questions suivantes en utilisant les parties précédentes et vous indiquerez obligatoirement la référence la plus appropriée pour votre réponse (donc une seule référence qui compte pour la moitié des points) :

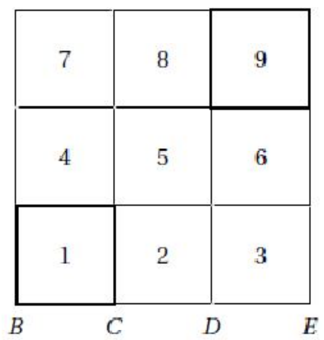
- Expression de f ou de f '
- Tableau de variations
- Tableau de données
- Courbe

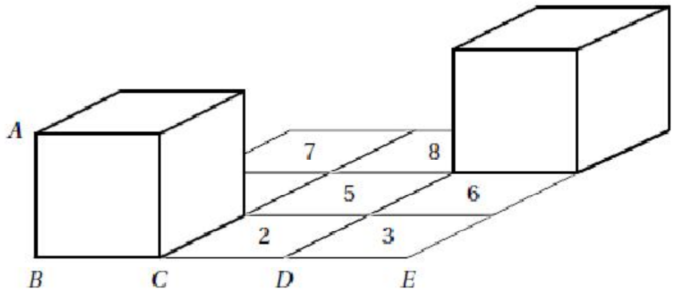
5. Quels sont les bénéfices obtenus dans une journée pour la fabrication de 80 ordinateurs ?
6. La journée précédente, l'entreprise a fait un bénéfice de 500€. Combien d'ordinateurs a-t-elle pu fabriquer hier ?
7. Rentabilité
   - 7.1. Quelle quantité d'ordinateurs doit-elle fabriquer pour faire des bénéfices chaque jour ?
   - 7.2. Quelle quantité d'ordinateurs doit-elle produire pour faire un bénéfice maximal ?
   - 7.3. Quel est alors ce bénéfice journalier maximal ?
   - 7.4. Dans ce cas, quel bénéfice maximal fait-elle par ordinateur fabriqué ?
   - 7.5. Pour rattraper des mauvaises journées, l'entreprise veut faire un bénéfice minimal de 1000€. Quelle quantité d'ordinateurs doit-elle fabriquer ?

DS 1 – FONCTIONS, PERSPECTIVE CENTRALE p2

Exercice n°3 (7points) :

Un damier est composé de 9 cases carrées de même dimension. Ces cases sont numérotées de 1 à 9 comme l'indiquent les deux dessins ci-dessous. Le plan du damier est un plan horizontal. On a déposé sur les cases 1 et 9 de ce damier deux cubes. Chaque face de ces deux cubes a exactement la même dimension que chaque case du damier





Damier et cubes
représentation en perspective parallèle

Les points A, B, C, D et E sont tels que :

- A, B et C sont trois sommets du cube déposé sur la case 1 ;
- Le segment $[BE]$ est un bord du damier ;
- C et D sont les points du segment $[BE]$ tels que $BC = CD = DE$.

L'objectif est de représenter en perspective centrale le damier et les deux cubes. On se place dans le cas où le bord $[DE]$ du damier et l'arête $[AB]$ du cube sont dans un plan frontal.

Dans **le dessin donné ci-dessous** on a commencé cette représentation en perspective centrale :

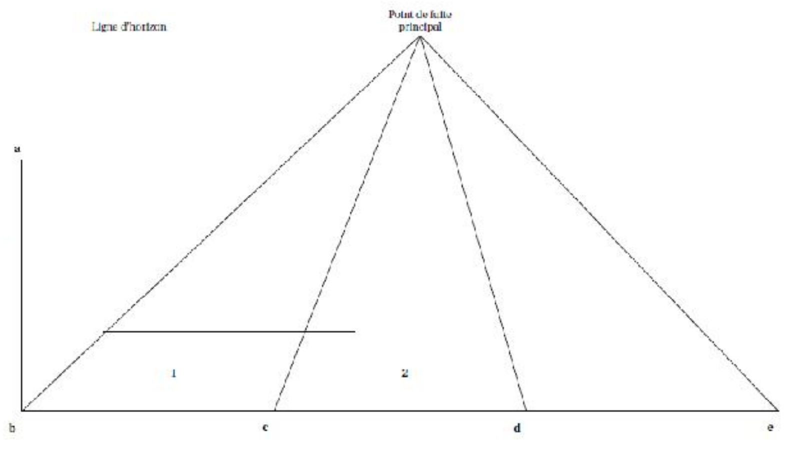
Les points a, b, c, d et e représentent dans cette perspective centrale les points A, B, C, D et E.

On a représenté en trait gras le bord $[be]$ du damier, et l'arête verticale $[ab]$ du cube posé sur la case 1.

Ce dessin est à compléter et à rendre avec la copie.

Pour toutes les constructions de l'exercice, on laissera apparents les traits de construction.

1. Terminer la représentation en perspective centrale du damier (il faudra prolonger la ligne d'horizon)
2. Citer deux règles de la perspective à point de fuite qui peuvent être vérifiées sur la figure.
3. Représenter dans cette perspective centrale le cube déposé sur la case 1.
4. Représenter dans cette perspective centrale le cube déposé sur la case 9.



Correction – Exercice 1

1. $\left[f(0) = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3} \neq -\dfrac{1}{2} \right.$ donc $\boxed{\text{Faux}}$

2. $\left[f(-3) = \text{ERREUR} \right.$ donc -3 ne peut pas appartenir à D donc $D \neq \mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{Faux}}$

3. $\left[\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{3(2x+6) - 2(3x-4)}{(2x+6)^2} = \dfrac{26}{(2x+6)^2} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Signe du dénominateur : } (2x-6)^2 > 0 \text{ sur } D \\ \text{Signe du numérateur : } 26 > 0 \end{array} \right\} \text{donc } f'(x) > 0 \text{ et } f \text{ strictement croissante : } \boxed{\text{Faux}} \end{array} \right.$

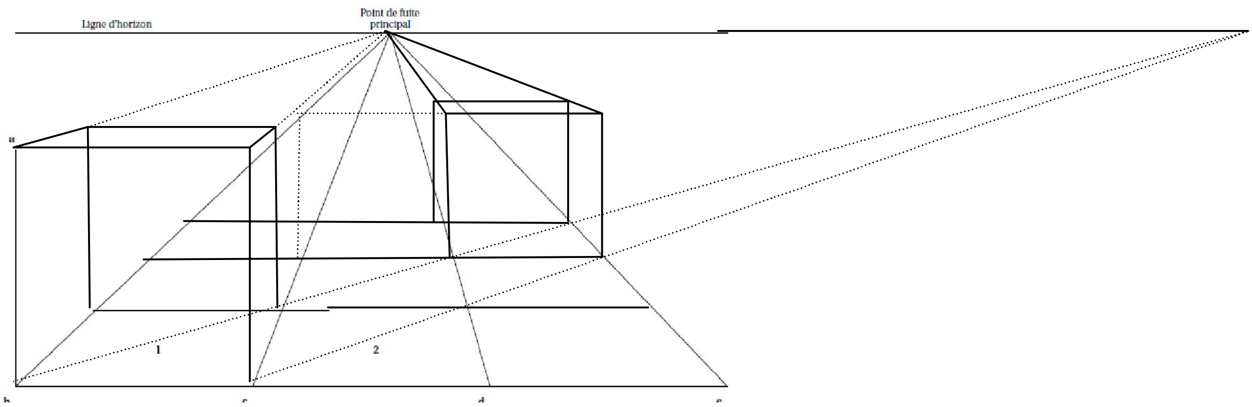
4. $\left[f'(x) = \dfrac{26}{(2x+6)^2} \right.$ donc $f'(1) = \dfrac{26}{8^2} = \dfrac{13}{32}$ donc $\boxed{\text{Vrai}}$

5. $\left[f(0) = -\dfrac{2}{3} \right.$ donc f(0) négatif or $0 \in \left] -3 ; \dfrac{4}{3} \right[$ donc tableau $\boxed{\text{faux}}$

Exercice 3 – Correction

Questions :	1 : 1,5p	2 : 1,5p	3 : 2p	4 : 2p

Représentation du damier et des deux cubes (questions 1 ; 3 ; 4)



Règles de la perspective centrale (question 2)

1.1. Les droites parallèles entre elles et sécantes au plan du tableau sont représentées par des droites convergeant vers un même point de fuite

1.2. Les droites parallèles entre elles et frontales sont représentées par des droites parallèles entre elles et parallèles aux droites initiales.

Correction – Exercice 2

1.(1,5p)
$f(x)=0,1x^3-2,1x^2+12x-5$ donc $f'(x)=0,3x^2-4,2x+12$
Posons $A(x)=0,3(x-4)(x-10)$
$A(x)=0,3\left(x^2-14x+40\right)=0,3x^2-4,2x+12=f'(x)$
donc $f'(x)=0,3(x-4)(x-10)$

2.(1,5p)
Tableau de signe

valeurs de x	0		4		10		12
signe de $x-4$		$-$ signe de $-a$	0	$+$ signe de a=1		$+$	
signe de $x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où le tableau de variation

valeurs de x	0		4		10		12
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de $f(x)$	-5	$\nearrow$	15,8	$\searrow$	5	$\nearrow$	9,4

3.(0,5p)

valeurs de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Résultats $f(x)$	-5	5	11,4	14,8	15,8	15	13	10,4	7,8	5,8	5	6	9,4

4.(0,5p) Voir courbe ci-dessous

5.(0,5p) Bénéfice $=f(8)=7,8$ d'après le tableau de données soit $\boxed{780€}$

6.(0,75p) On cherche x tel que $f(x)=5 \Leftrightarrow S=\{1;10\}$ d'après le graphique soit un bénéfice de 500€ pour $\boxed{\text{10 ou 100 ordinateurs fabriqués}}$

7.1.(0,75p) On cherche x tel que $f(x)>0 \Leftrightarrow S=]0,5;12[$ d'après le graphique soit bénéfices obtenus $\boxed{\text{entre 5 et 120 ordinateurs fabriqués}}$

7.2.(0,5p) On cherche x tel que $f(x)$ maximum $\Leftrightarrow f(x)$ maximum pour $x=4$ d'après tableau de variation soit bénéfice maximal obtenu pour $\boxed{\text{40 ordinateurs fabriqués}}$

7.3.(0,25p) Bénéfice maximal $=f(4)=15,8$ d'après tableau de variation soit $\boxed{1580€}$

7.4.(0,5p) Bénéfice maximal par ordinateur $=\dfrac{1580}{40}=39,5€$

7.5.(0,75p) On résoud l'inéquation $f(x)\geq 10 \Leftrightarrow S=[1,7\,;\,7,1] \Leftrightarrow$ l'entreprise doit fabriquer entre 17 et 71 ordinateurs pour obtenir un bénéfice supérieur à 1000€