Devoir de Mathématiques

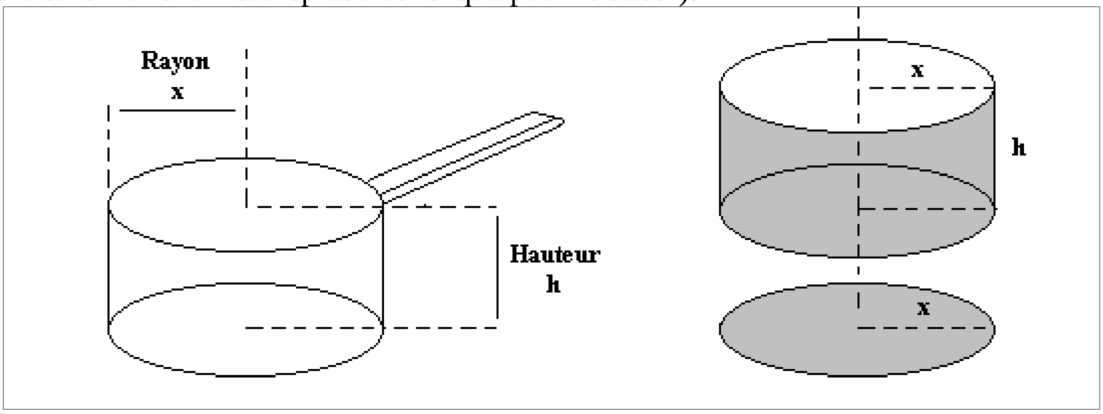
Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur [5; 20] par $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1000}{x}$.

a) Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}$.

b) Construire le tableau des variations de f sur [5; 20]. Quel est le minimum de f sur [5; 20] ?

2. Une casserole est constituée d'un fond de rayon x et d'un cylindre de hauteur h (il n'y a pas de couvercle et le manche n'est représenté ici que pour le décor).



a) Exprimer la surface F du fond en fonction de x, puis la surface latérale L du cylindre et le volume V de la casserole, en fonction de x et h.

b) On souhaite construire une casserole de volume imposé 1000π cm³. Calculer h en fonction de x et exprimer la surface totale de tôle S(x) nécessaire.

3. a) Montrer que $S(x) = 2\pi f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la question 1. En déduire les variations, sur l'intervalle [5 ; 20], de la fonction S.
b) Quelles sont les dimensions d'une casserole de 1000π cm³ qui utilise le moins de tôle possible ? Quelle est alors la surface utilisée ?

Rappels :
L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 ; le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$;
On obtient le volume d'un cylindre en multipliant l'aire de la base par la hauteur.

Exercice 2

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les coordonnées du point A de H d'abscisse $\frac{2}{3}$, puis une équation de la tangente T à H en ce point.
2. Déterminer les coordonnées des points B et C intersections de T avec les axes de coordonnées. Vérifier que A est le milieu de [BC].
3. Généralisation : reprendre les questions précédentes avec le point A d'abscisse a.
Question bonus : en déduire une méthode géométrique de la construction des tangentes à H.