Classe de terminale 10 Jeudi 26 novembre 2009

Devoir de mathématiques n°3

Exercice 1 (exponentielle, bac S, Antilles Guyane, juin 2008, 8 points)

Soit f la fonction définie sur ***R*** par $f(x)=\frac{9}{2}e^{-2x}-3e^{-3x}$.

1. Démontrer que l'on a pour tout x : $f(x)=3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f et $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
4. Calculer $f(1)$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f et des axes du repère.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.
6. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $y'+2y=3e^{-3x}$.

Exercice 2 (primitives, 4 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction F définie sur ***R*** par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ soit une primitive de la fonction $f : x \to x^2e^{-2x}$.
2. Déterminer la primitive G de la fonction g définie par $g(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$ qui s'annule pour $x=0$.
3. Déterminer les primitives de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{3x^2}$.
4. Déterminer une primitive de la fonction k définie sur $\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[$ par $k(x)=\frac{4}{(2x+3)^4}$.

Exercice 3 (fonction exponentielle, limites, continuité, dérivabilité, suites, 8 points)

1. Restitution organisée de connaissances :
   On rappelle que la fonction exponentielle est la solution de l'équation différentielle $y'=y$ telle que $\exp(0)=1$, que pour tout réel x, $\exp(x)>0$ et que l'exponentielle est strictement croissante sur ***R***. On pourra noter indifféremment $\exp(x)$ ou e^x l'exponentielle. En utilisant ces résultats, démontrer les propriétés suivantes :
   a. $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1$.
   b. Pour tout réel x, $\exp(x)\geq x+1$

On appelle f la fonction définie sur ***R*** par $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{x}$ si $x\neq 0$, et $f(0)=-1$

2. A l'aide de la question 1, démontrer que f est continue en 0.
3. Démontrer que l'on a pour tout $x\neq 0$: $f'(x)=\frac{e^{-x}(e^x-x-1)}{x^2}$.
4. On admet que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\frac{1}{2}$. Quelle information sur la fonction f peut-on en déduire ?
5. Etudier la limite de f en $+\infty$. Démontrer que l'on a, pour tout $x\neq 0$, $f(x)=\frac{1-e^x}{xe^x}$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
6. A l'aide de la question 1, étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
7. Soit n un entier strictement positif. Démontrer qu'il existe un unique réel a_n tel que $f(a_n)=\frac{-1}{n}$. En utilisant les variations de f, montrer que la suite (a_n) est croissante et qu'elle n'est pas majorée. Que peut-on en déduire pour $\lim_{n\to+\infty}a_n$?
8. En remarquant (avec démonstration) que $e^{-a_n}-1=-\frac{a_n}{n}$, déterminer la limite de $\frac{a_n}{n}$.