Classe de terminale S₅

Devoir de mathématiques

N°6

Exercice 1) (un peu difficile, peut-être, 7 points)

On appelle *f* la fonction définie sur ℝ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^x-1}{x} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de *f*.
2) Etudier les limites de *f* en -∞ et +∞
3) Calculer la dérivée de *f* sur $\mathbb{R}-\{0\}$, déterminer son signe à l'aide de l'étude des variations de la fonction *g* définie par $g(x)=xe^x-e^x+1$. En déduire le sens de variation de *f*.
4) On pose $u(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ et $v(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x^3$. Calculer u', u'' puis v', v'', $v^{(3)}$.

   En déduire que pour tout *x* de $[0\,;\ln 6]$ on a $\dfrac{x^2}{2}\leq e^x-1-x\leq\dfrac{x^2}{2}+x^3$, et que pour tout $x\leqslant 0$ on a $\dfrac{x^2}{2}+x^3\leq e^x-1-x\leq\dfrac{x^2}{2}$
5) Déduire de la question précédente la limite en 0 de $\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$. *f* est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2) (d'après bac S, Nouvelle Calédonie, 1996, 13 points)

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=(1-2x)e^{2x}$.

1) Etudier les limites de *f* en +∞ et en -∞.
2) Calculer $f'(x)$, étudier les variations de *f*, dresser son tableau de variation.
3) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de *f* dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

Partie B

La fonction *f* est toujours celle définie dans la partie A. On note $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$, $f^{(3)}$, … $f^{(n)}$ les dérivées successives de *f*, *n* désignant un entier naturel non nul.

1) Calculer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.
2) Montrer par récurrence sur l'entier non nul *n* que $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.
3) Pour tout entier non nul *n*, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   a) Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n.
   b) Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de (x_n) ?
   c) Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de (y_n) ?