

Classe de TS₄

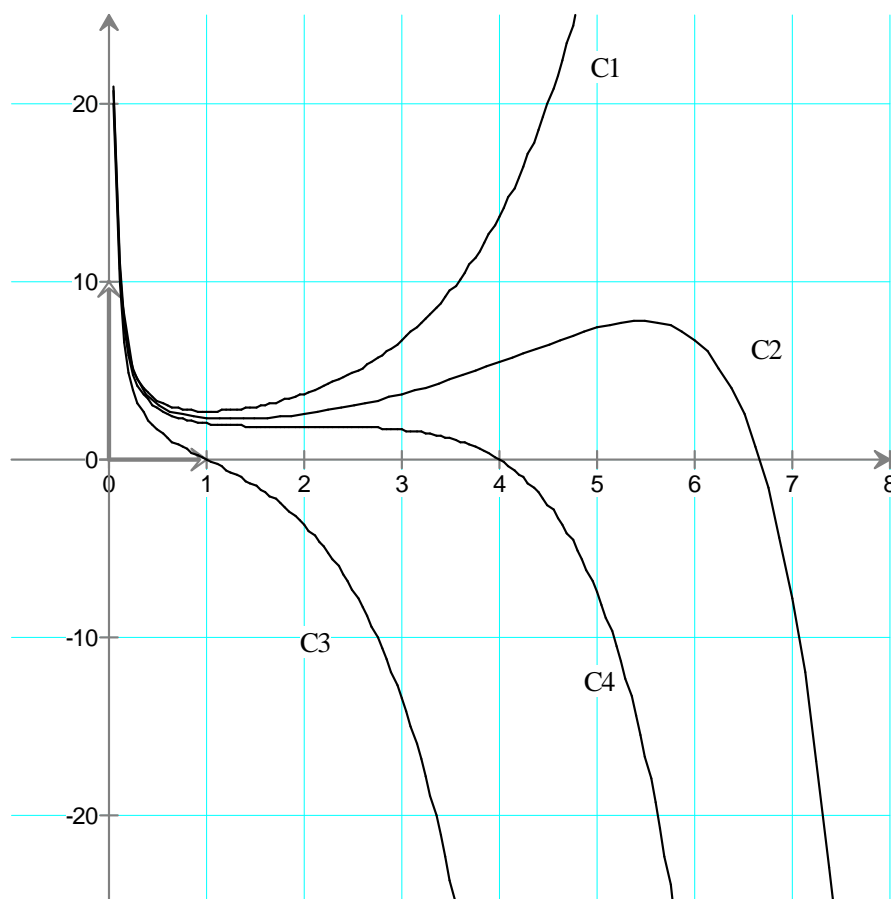
Lundi 14 novembre 2005

Devoir de mathématiques n°6

Exercice 1 (bac S, la Réunion, juin 2003, extrait, 10 points)

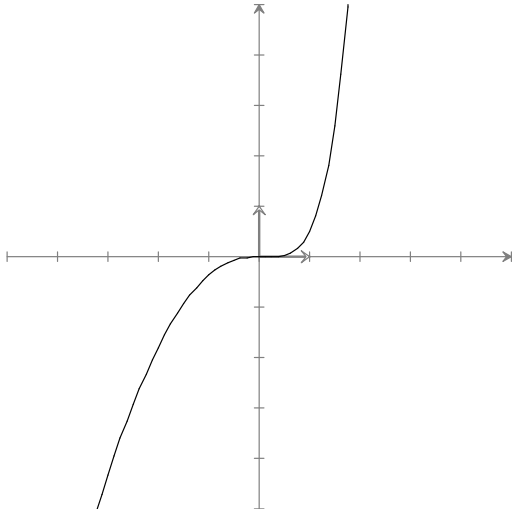
On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^{-x}}{x^2}$, et on cherche les solutions de cette équation définies sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{e^x}{x}$ est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction v est solution de (E) si et seulement si la fonction h définie par $h(x) = v(x) - \frac{e^x}{x}$ vérifie l'équation : $h' - h = 0$. En déduire les solutions de l'équation (E) définies sur $]0 ; +\infty[$
3. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \frac{kx+1}{x} e^x$. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
4. Calculer la dérivée de f_k . Déterminer, suivant les valeurs de k le nombre de solutions à l'équation $f_k'(x) = 0$.
5. Sur la figure ci-dessous, on a représenté les fonctions $f_0, f_{-1}, f_{-0,25}, f_{-0,15}$. A l'aide de la question 4, expliquer quelle courbe correspond à quelle fonction.



Exercice 2 (bac S, Inde, avril 2003, extrait, 10 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$, dont la courbe est représentée ci-dessous :



En observant ce graphique, quelles conjectures pouvez-vous faire concernant :

- Le sens de variation de f
- La position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

On va maintenant contrôler ces conjectures.

- Calculer $f'(x)$, l'exprimer à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
- Étudier la limite de g en $-\infty$ et les variations de g .
- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une solution unique α , donner un encadrement de α .
- En déduire les variations de f . Que peut-on dire de la première conjecture ?
- Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
- Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses. Que peut-on dire de la deuxième conjecture ?
- Tracer la partie de la courbe de f sur l'intervalle $-0,2 \leq x \leq 0,4$, avec pour unités 1 cm pour 0,05 en abscisses, et 1 cm pour 0,001 en ordonnées.