Classe de Terminale 11 **Mercredi 26 novembre 2008**

Devoir de mathématiques n°3

EXERCICE 1 Bac S, centres étrangers, juin 2007, 14 points

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

A. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$

1. Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

a. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. Étudier le signe de f sur l'intervalle [0 ; α].

B. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle [0 ; α].

C. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

EXERCICE 2 Bac S, Nouvelle Calédonie, Novembre 2008, 6 points

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

Sachant que la fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, démontrer que $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier, $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $e - 1$.