Classe de terminale S_2 *Jeudi 18 novembre 2004*

Devoir de mathématiques n°6

Exercice 1) (Mélange de divers sujets de bac, 12 points)

Dans une large mesure, les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes.

1) On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = x$.
   a. Déterminer les constantes réelles a et b telles que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax + b$ est solution de (E).
   b. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + (x+1)$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
   c. En déduire les solutions de (E)
2) Pour tout réel k, on appelle f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^x - x - 1$.
   a. Etudier la limite de f_k en $-\infty$. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_k$ de f_k.
   b. Etudier la limite de f_k en $+\infty$ (on sera amené à distinguer $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$).
   c. Etudier les variations de f_k (on sera amené à distinguer $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$).
   d. (Question bonus hors barème) Pour $k > 0$, on appelle A_k le point où $\mathscr{C}_k$ a une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer en fonction de k les coordonnées de A_k et montrer que, quand k varie dans $]0 ; +\infty[$, les points A_k sont alignés.
3) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.
   a. a désigne un nombre réel, et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Montrer que la tangente T_a à $\mathscr{C}$ en A a pour équation cartésienne $y = (e^a - 1)x + e^a(1 - a) - 1$.
   b. En déduire le point d'intersection de T_a et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 1$.
   c. Comment construit-on T_a connaissant A ?
   d. Construire $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}$ et la droite T_1.

Exercice 2) (d'après bac E, Rennes, 1976, 8 points)

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = xe^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0.
4) Etudier les variations de f.
5) Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f (on sera amené à poser $x = \frac{1}{t}$).
6) Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.